

APPOLO STUDY CENTRE

Test - IV

TIME & WORK AND PROBABILITY

1. (A) A can do a piece of work in 10 days and B can do it in 15 days. How much does each of them get if they finish the work and earn ₹2500?

A ஒரு வேலையை 10 நாட்களிலும், B அதை 15 நாட்களிலும் செய்து முடிப்பார். இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையைச் செய்து ₹2500 ஐ ஈட்டினால், அத்தொகையை எவ்வாறு பிரித்துக் கொள்வர்?

Solution:

A can do a work in 10 days

B can do the same work in 15 days

Ratio of A to B

A : B

10 : 15

time $2x : 3x$

Efficiency : $3x : 2x$

Total Efficiency = $5x$

Total amount = Rs. 2500

$$5x = 2500$$

$$x = \frac{2500}{5}$$

$$x = \text{Rs. } 500$$

Share of A = 3×500

= Rs. 1500

Then share of B = 2×500

= Rs. 1000

- (B) A bag contains 5 red balls and some blue balls. If the probability of drawing a blue ball from the bag is thrice that of drawing a red ball, then find the number of blue balls in the bag.

ஒரு பையில் 5 சிவப்பு மற்றும் சில நீல நிறப் பந்துகள் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து ஒரு நீல நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு, ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவின் 3 மடங்கு எனில் அப்பையில் உள்ள நீல நிறப்பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

Solution:

let the number of blue balls be x .

Total number of balls, $n(S) = 5 + x$

Let B be the event of drawing a blue ball and R be the event of drawing a red ball.

Given $P(B) = 3P(R)$

$$\begin{aligned}\frac{n(B)}{n(S)} &= 3 \frac{n(R)}{n(S)} \\ &= \frac{x}{5+x} = 3 \left(\frac{5}{5+x} \right) \\ x &= 15\end{aligned}$$

Thus, number of blue balls = 15.

2. 3 men and 4 women can earn ₹ 3780 in 7 days. 11 men and 13 women can earn ₹ 15040 in 8 days. In what time will 7 men and 9 women earn ₹ 24800?

3 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்கள் 7 நாட்கள் ஒரு வேலை செய்வதன் மூலம் ரூ 3780 ஊதியமாக பெறுகின்றனர். அதே வேலையை 11 ஆண்கள் மற்றும் 13 பெண்கள் செய்வதால் 8 நாட்களுக்கு ரூ 15040 ஐ ஊதியமாக பெற்றால், அதே வேலையை 7 ஆண்கள் மற்றும் 9 பெண்கள் செய்து ரூ 24800 ஐ பெற ஆகும் நாட்களின் எண்ணிக்கை?

Solution:

Let Men is M women is W

$$3M + 4W = \text{Rs. } 3780 \text{ (7 days)}$$

$$3M + 4W = 540 \text{ (1 day)}$$

$$11M + 13W = \text{Rs. } 15040 \text{ (8 days)}$$

$$11M + 13W = 1880 \text{ (1 day)}$$

$$(1) \times 11 - (2) \times 3$$

$$33M + 44W = 5940$$

$$33M + 39W = 5640$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 5W = 300$$

$$\boxed{W = \text{Rs } 60}$$

Substitute $W = 60$ in (1)

$$3M + 240 = 540$$

$$3M = 300$$

$$\boxed{M = \text{Rs. } 100}$$

$$24800 = 7 \times 100x + 9 \times 60x$$

$$24800 = 700x + 540x$$

$$1240x = 24800$$

$$x = \frac{24800}{1240}$$

$$\boxed{x = 20 \text{ days}}$$

3. A card is drawn from a pack of 52 cards. Find the probability of getting a king or a heart or a red card.

52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகின்றது. அந்தச் சீட்டு இராசா அல்லது ஹார்ட் அல்லது சிவப்பு நிறச் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

Solution:

Total number of cards = 52; $n(S) = 52$

Let A be the event of getting a king card, $n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52}$$

Let B be the event of getting a heart card $n(B) = 13$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52}$$

Let C be the event of getting a red card. $n(C) = 26$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{26}{52}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{getting heart king}) = \frac{1}{52}$$

$$P(B \cap C) = P(\text{getting red and heart}) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap C) = P(\text{getting red king}) = \frac{2}{52}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\text{getting heart, king which is red}) = \frac{1}{52}$$

Therefore, required probability is

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{26}{52} - \frac{1}{52} - \frac{13}{52} - \frac{2}{52} + \frac{1}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

4. (A) A tap A can fill a drum in 10 minutes. A second tap B can fill in 20 minutes. A third tap C can empty in 15 minutes. If initially the drum is empty, find when it will be full if all taps are opened together?

A என்ற குழாய் ஒரு பெரிய பாத்திரத்தைத் தனியே 10 நிமிடங்களில் நிரப்பும். B என்ற குழாய் அதே பாத்திரத்தைத் தனியே 20 நிமிடங்களில் நிரப்பும். நீர் நிரப்பியுள்ள அப்பாத்திரத்தை C என்ற குழாய் 15 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். ஆரம்பத்தில் பாத்திரம் காலியாக இருந்து, இம்முன்று குழாய்களையும் திறந்தால், அப்பாத்திரம் நிரம்ப எவ்வளவு நேரமாகும்?

Solution:

$$\text{Tap A's 1 min work done} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Tap B's 1 min work done} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Tap C's 1 min work done} = \frac{1}{15}$$

$$(A + B - C) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{1}{15}$$

$$= \frac{6+3-4}{60}$$

$$= \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

Time taken to fill the tank = 12 minutes

(B) A bag contains 5 red balls, 6 white balls, 7 green balls, 8 black balls. One ball is drawn at random from the bag. Find the probability that the ball drawn is

(i) black or red (ii) not white (iii) neither white nor black

ஒரு பையில் 5 சிவப்பு நிறப்பந்துகளும், 6 வெள்ளை நிறப்பந்துகளும், 7 பச்சை நிறப்பந்துகளும், 8 கருப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்தப் பந்து (i) கருப்பு அல்லது சிவப்பு (ii) வெள்ளையாக இல்லாமல் (iii) வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

Solution:

5 red 6 white 7 green 8 black total no. of balls = 5 + 6 + 7 + 8 = 26

$$\text{i. Prob(black or red)} = \frac{5+8}{26} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii. Prob (not white)} = 1 - \text{prob(white)}$$

$$= 1 - \frac{6}{26} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$$

$$\text{iii. prob (neither white nor black)} = 1 - \text{prob (white or black)}$$

$$= 1 - \frac{6+8}{26} = 1 - \frac{14}{26}$$

$$= \frac{26-14}{26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

5. Two balls are chosen randomly from an urn containing 8 white and 4 black balls. Suppose that we win Rs 20 for each black ball selected and we lose Rs 10 for each white ball selected. Find the probability distribution, expected winning amount and variance.

8 வெள்ளை மற்றும் 4 கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து இரு பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு கருப்பு பந்துக்கும் ரூ 20 வெல்லும் தொகையாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு வெள்ளை பந்துக்கும் ரூ 10 தோற்கும் தொகையாகவும் கருதுக. நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. மேலும் எதிர்பார்க்கப்படும் வெல்லும் தொகை மற்றும் பரவற்படி காண்க.

Solution

Let X denote the winning amount. The possible events of selection are (i) both balls are black, or (ii) one white and one black or (iii) both are white. Therefore X is a random variable that can be defined as

$$X (\text{both are black balls}) = ₹ 2(20) = ₹ 40$$

$$X (\text{one black and one white ball}) = ₹ 20 - ₹ 10 = ₹ 10$$

$$X (\text{both are white balls}) = ₹ 2(-10) = -₹ 20$$

Therefore X takes on the values 40, 10 and -20

Total number of balls $n = 12$

Total number of ways of selecting 2 balls = $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66$

Number of ways of selecting 2 black balls = $\binom{4}{2} = 6$

Number of ways of selecting one black ball and one white ball = $\binom{8}{1} \binom{4}{1} = 32$

Number of ways of selecting 2 white balls = $\binom{8}{2} = 28$

Probability distribution is

X	40	10	-20	Total
f(x)	$\frac{6}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{28}{66}$	1

Mean:

$$E(X) = \sum xf(x) = 40 \cdot \left(\frac{6}{66}\right) + 10 \cdot \left(\frac{32}{66}\right) + (-20) \cdot \left(\frac{28}{66}\right) = 0$$

That is expected winning amount is 0

Variance:

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = 40^2 \cdot \left(\frac{6}{66}\right) + 10^2 \cdot \left(\frac{32}{66}\right) + (-20)^2 \cdot \left(\frac{28}{66}\right) = \frac{4000}{11}$$

$$(E(X))^2 = 0^2 = 0$$

$$\text{This gives } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{4000}{11} - 0 = \frac{4000}{11}$$

$$\text{Therefore } E(X) = 0 \text{ and } V(x) = \frac{4000}{11}$$

15 Marks

6. (A) Eight men and twelve boys can finish a piece of work in 10 days while six men and eight boys can finish the same work in 14 days. Find the number of days taken by one man alone to complete the work and also one boy alone to complete the work.

8 ஆண்கள் மற்றும் 12 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு வேலையை 10 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். அதே வேலையை 6 ஆண்கள் மற்றும் 8 சிறுவர்கள் சேர்ந்து 14 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். ஒரு ஆண் தனியாக அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பார்? ஒரு சிறுவன் தனியாக அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பான்?

Solution:

Let x denote the number of days needed for one man to finish the work and y denote the number of days needed for one boy to finish the work. Clearly, $x \neq 0$ and $y \neq 0$.

So, one man can complete $\frac{1}{x}$ part of the work in one day and one boy can complete $\frac{1}{y}$ part of the work in one day.

The amount of work done by 8 men and 12 boys in one day is $\frac{1}{10}$

$$\text{Thus, we have } \frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10} \quad (1)$$

The amount of work done by 6 men and 8 boys in one day is $\frac{1}{14}$

$$\text{Thus, we have } \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$$

Let $a = \frac{1}{x}$ and $b = \frac{1}{y}$, Then (1) and (2) give, respectively.

$$8a + 12b = \frac{1}{10} = 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0$$

$$6a + 8b = \frac{1}{14} = 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0$$

Writing the coefficients of (3) and (4) for the cross multiplication. we have

$$\text{Thus, we have } \frac{a}{-\frac{3}{14} + \frac{1}{5}} = \frac{b}{-\frac{3}{20} + \frac{1}{7}} = \frac{1}{16-18} \text{ i.e. } \frac{a}{-\frac{1}{70}} = \frac{b}{-\frac{1}{140}} = \frac{1}{-2}$$

$$\text{That is, } a = \frac{1}{140}, b = \frac{1}{280}$$

$$\text{Thus, we have } x = \frac{1}{a} = 140, y = \frac{1}{b} = 280$$

Hence, one man can finish the work individually in 140 days and one boy can finish the work individually in 280 days.

(B) Given that $P(A) = 0.52$, $P(B) = 0.43$, and $P(A \cap B) = 0.24$, find

i. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ii. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

$P(A) = 0.52$, $P(B) = 0.43$, மற்றும் $P(A \cap B) = 0.24$, எனில்

i. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ii. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Solution:

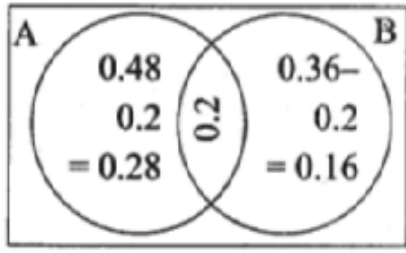
$$\begin{aligned} \text{i. } P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{(A \cup B)}) \text{ (By de Morgan's law)} \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0.71 = 0.29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } P(\overline{A \cup B}) &= P(\overline{A \cap B}) \quad (\text{By de Morgan's law}) \\ &= 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24 \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

7. The probability that a new railway bridge will get an award for its design is 0.48, the probability that it will get an award for the efficient use of materials is 0.36, and that it will get both awards is 0.2. What is the probability, that (i) it will get at least one of the two awards (ii) it will get only one of the awards.

ஒரு தொடர்வண்டி செல்லும் புதிய பாலத்தின் அமைப்பிற்காக விருது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.48 நேர்த்தியான முறையில் மூலப்பொருட்களைப் பயன்படுத்தியதற்காக விருது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.36 மற்றும் மேற்கண்ட இரு விருதுகளையும் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 எனில் (i) குறைந்தது ஒரு விருதாவது கிடைப்பதற்கு (ii) ஒரே ஒரு விருது மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் யாவை?

Given $P(A) = 0.48$, $P(B) = 0.36$ and $P(A \cap B) = 0.2$



$$\begin{aligned} \text{i. } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.48 + 0.36 - 0.2 = 0.64 \\ \text{ii. } P(\text{Getting only one award}) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (0.48 - 0.2) + (0.36 - 0.2) \\ &= 0.28 + 0.16 = 0.44 \end{aligned}$$

8. (A) Two customers Priya and Amuthan are visiting a particular shop in the same week (Monday to Saturday). Each is equally likely to visit the shop on any one day as on another days. What is the probability that both will visit the shop on consecutive days?

இரண்டு நுகர்வோர்கள், பிரியா மற்றும் அமுதன் ஒரு குறிப்பிட்ட அங்காடிக்கு, குறிப்பிட்ட வாரத்தில் (திங்கள் முதல் சனி வரை) செல்கிறார்கள். அவர்கள் அங்காடிக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒவ்வொரு நாளுமும் செல்கிறார்கள். இருவரும் அங்காடிக்கு அடுத்தடுத்த நாட்களில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

Solution:

If Priya and Amuthan are visiting the shop in the same week, the sample space

$$\begin{aligned} S = \{ &(\text{Mon, Mon}) (\text{Mon, Tue}) (\text{Mon, Wed}) \\ &(\text{Mon, Thur}) (\text{Mon, Fri}) (\text{Mon, Sat}) \\ &(\text{Tue, Mon}) (\text{Tue, Tue}) (\text{Tue, Wed}) \end{aligned}$$

(Tue, Thur) (Tue, Fri) (Tue, Sat)
 (Wed, Mon) (Wed, Tue) (Wed, Wed)
 (Wed, Thur) (Wed, Fri) (Wed, Sat)
 (Thur, Mon) (Thur, Tue) (Thur, Wed)
 (Thur, Thur) (Thur, Fri) (Thur, Sat)
 (Fri, Mon) (Fri, Tue) (Fri, Wed) (Fri, Thur)
 (Fri, Fri) (Fri, Sat) (Sat, Mon) (Sat, Tue)
 (Sat, Wed) (Sat, Thur) (Sat, Fri) (Sat, Sat)}

Let 'A' be the event that both will visit the shop on consecutive days.

$A = \{(Mon, Tue) (Tue, Wed) (Wed, Thur) (Thur, Fri) (Fri, Sat)\}$

$$n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(B) In a class of 50 students, 28 opted for NCC, 30 opted for NSS and 18 opted both NCC and NSS. One of the students is selected at random. Find the probability that the student opted for NCC but not NSS.

50 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், 28 பேர் NCC-யிலும், 30 பேர் NSS- லும் மற்றும் 18 பேர் NCC மற்றும் NSS-லும் சேர்கிறார்கள். ஒரு மாணவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார் அவர் NCC – யில் இருந்து, ஆனால் NSS-ல் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

Solution:

Total number of students $n(S) = 50$

Let A and B be the events of students opted for NCC and NSS respectively.

$n(A) = 28, n(B) = 30, n(A \cap B) = 18$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

i. Probability of the students opted for NCC but not NSS

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{28}{50} - \frac{18}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

(C) A die is rolled and a coin is tossed simultaneously. Find the probability that the die shows an odd number and the coin shows a head.

ஒரு பகடை உருட்டப்படும் அதே நேரத்தில் ஒரு நாணயமும் சுண்டப்படுகிறது. பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கும், நாணயத்தில் தலைக் கிடைப்பதற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.

Solution:

Sample space

$$S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$$

$$n(S) = 12$$

Let A be the event of getting an odd number and a head.

$$A = \{1H, 3H, 5H\}; n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

