FORCE AND MOTION
Part - 2

11TH VOL- I	**UNIT - 2**	**இயக்கவியல்**
	UNIT - 3	**இயக்க விதிகள்**
	UNIT - 5	**துகள்களாலான அமைப்பு மற்றும் திண்மப்பொருட்களின் இயக்கம்**

11வது இயற்பியல் – I

அலகு– 2

இயக்கவியல் (Kinematics)

அறிமுகம்

இயற்பியல், அடிப்படையில் ஒரு சோதனை அடிப்படையிலான அறிவியல் (Experimental Science) ஆகும். இது சோதனை மற்றும் கணிதம் என்ற இரண்டு தூண்களின் மீதுநிலை நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. இரண்டாயிரத்து முன்னூறு ஆண்டுகளுக்குமுன்னர் கிரேக்க நூலகர் இராட்டோஸ்தெனிஸ் (Eratosthenes) என்பவர் புவியின் ஆரத்தை அளவீடு செய்தார். மிக நீண்ட இடைவெளிக்குப் பின்னர் 20 ஆம் நூற்றாண்டின் துவக்கத்தில்தான் அணுவின் அளவு அளவீடு செய்யப்பட்டது. இயற்பியலின் மையக்கருத்தாக இயக்கம் உள்ளது. அணுத்துகள்களின் இயக்கத்திலிருந்து, பிரபஞ்சத்தில் உள்ளகோள்களின் இயக்கம் வரை இயற்கையின் அனைத்து நிலைகளிலும் இயக்கம் இருக்கிறது. சுருங்கக்கூறின் முழு பிரபஞ்சமே பல்வேறுவகையான இயக்கங்களின் தொகுப்பாக உள்ளது. இந்த பல்வேறுவகையான இயக்கங்களும் கணிதமொழியில் விவரிக்கப்பட்டுள்ளன.

பொருள் எவ்வாறு இயங்குகிறது? எவ்வளவு வேகமாக அல்லது மெதுவாக இயங்குகிறது? எடுத்துக்காட்டாக, பத்துதடகளவீரர்கள் ஓர் ஓட்டப்பந்தயத்தில் ஓடுகின்றனர் ஆனால்,அனைவரும் ஒரேவேகத்தில் ஓடுவதில்லை. அவர்களின் ஓட்டத்தினைநாம் நடைமுறையில் பயன்படுத்தும் வார்த்தைகளான மிகவேகமாக,வேகமாக, மெதுவாக, மிகமெதுவாக என்பன போன்ற வார்த்தைகளைக் கொண்டு அளவீடு செய்ய இயலாது. அளவீடுசெய்வதுஎன்றால் ஒவ்வொருவீரரின் ஓட்டத்திற்கும் எண்களை வழங்கி,அவ்வெண்களை ஒப்பீடு செய்வதன் மூலம் ஒருவீரரின் ஓட்டத்தினை மற்றவீரர்களின் ஓட்டத்தோடுஒப்பிட்டுப் பார்க்கமுடியும்.

இந்த அலகில் இயக்கத்தினை எண்மதிப்பு மற்றும் திசையின் அடிப்படையில் பகுத்துப் பார்ப்பதற்குத் தேவையான அடிப்படை கணிதவியல் முறைகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன. இயக்கத்தினை ஏற்படுத்தும் விசையைக் கருத்தில் கொள்ளாமல் இயக்கத்தைப் பற்றிமட்டும் கூறுவது இயக்கவியல் (Kinematics) ஆகும். கினமா (Kinema) என்ற கிரேக்க வார்த்தையின் பொருள் இயக்கமாகும். இயக்கவியலை இயங்கியல் என்றும் அழைக்கலாம்.

2.2 ஓய்வுமற்றும் இயக்கம் பற்றியகருத்து

ஓய்வு மற்றும் இயக்கம் பற்றிய கருத்தை, பின்வரும் விளக்கத்திலிருந்து நன்கு புரிந்து கொள்ளலாம். ஓடும் பேருந்தின் உள்ளே அமர்ந்திருக்கும் நபர், அவரின் அருகே உள்ளவரைப் பொறுத்து ஓய்வு நிலையிலும், பேருந்திற்கு வெளியே நின்று கொண்டிருப்பவரைப் பொறுத்து இயக்க நிலையிலும் உள்ளார். ஓய்வு நிலை மற்றும் இயக்க நிலை பற்றிய கருத்துகள், குறிப்பாயத்தை

பொறுத்து வேறுபடும். ஓய்வு அல்லது இயக்கத்தினைப் புரிந்துகொள்வதற்கு நமக்குத் தகுந்த நிலையான குறிப்பாயம் தேவை.

குறிப்பாயம்

எந்த ஒரு ஆய அச்சுத் தொகுப்பினைப் பொறுத்து பொருளொன்றின் நிலை குறிப்பிடப்படுகிறதோ, அந்த ஆய அச்சுத் தொகுப்பிற்கு குறிப்பாயம் என்று பெயர்.

எந்த ஒருகுறிப்பிட்ட நேரத்திலும் ஒரு பொருளின் நிலையினை விவரிக்கப் பயன்படும், ஆய அச்சுக்கள் (x,y,z) (அதாவது x,y மற்றும z அச்சுகளில் பொருளின் தொலைவு கொண்டகுறிப்பாய மேகார்டீசியன் ஆய அச்சுத் தொகுப்பு எனப்படும். இது படம் 2.2 ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

x,y மற்றும் z அச்சுக்கள் வரிசைப்படி கடிகாரமுள் சுழலும் திசைக்கு எதிர்திசையில் உள்ளவாறு வரையப்படும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும். மேலும் அவற்றை வலக்கைகார்டீசியன் ஆய அச்சுத்தொகுப்பு என அழைக்கலாம். வெவ்வேறு ஆய அச்சுத்தொகுப்புகள் இயற்பியலில் உள்ள போதும், மரபுப்படிநாம் வலக்கை ஆய அச்சுத்தொகுப்பு என அழைக்கலாம். வெவ்வேறு ஆய அச்சுத் தொகுப்புகள் இயற்பியலில் உள்ளபோதும், மரபுப்படிநாம் வலக்கை ஆய அச்சுத் தொகுப்பினையே பின்பற்றுகிறோம்.

வலக்கை ஆய அச்சுத்தொகுப்பு
உங்கள் வலக்கையின் விரல்களைநேர்க்குறிX- அச்சுத்திசையில்
வைத்து,அவற்றைY- அச்சுத்திசையில் சுழற்றினால்,உங்களின் பெருவிரல்
நேர்க்குறிZ-அச்சின் திசையினைக் காட்டும்.

புள்ளிநிறை (Point mass)

ஒருகுறிப்பிட்ட நிறைகொண்ட பொருளின் இயக்கத்தினை விளக்க,'புள்ளிநிறை'' என்றகருத்து தேவைப்படுகிறது. மேலும் புள்ளிநிறை என்ற கருத்துமிகவும் பயனுள்ளதாகவும் இருக்கிறது. பொருளின் நிறைமுழுவதும் ஒருகுறிப்பிட்டபுள்ளியில் செறிந்திருப்பதாகக் கருதினால், இப்படிப்பட் நிறையே'புள்ளிநிறை' என அழைக்கப்டுகிறது. புள்ளிநிறைக்கு வடிவமோ, அமைப்போ இல்லை. கணிதவியல் படி புள்ளிநிறை என்பது சுழி பரிணாமுடையது. ஆனால் வரம்புக்குட்பட்ட நிறை உள்ளது. இருப்பினும், புள்ளிநிறை என்பது நடைமுறையில் சாத்தியமில்லை. சில நேரங்களில் இக்கருத்து நமது கணக்கீடுகளை எளிமைப்படுத்தும், புள்ளி நிறைஎன்பது ஒன்றினைச் சார்ந்தகருத்து, அது நாம் பகுப்பாய்வு செய்யும் பொருளின் இயக்கம் மற்றும் பொருள் இயங்கும் குறிப்பாயம் இவற்றைப் பொறுத்துமட்டுமேஅர்த்தமுடையதாகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

- சூரியனைப் பொறுத்து புவியின் இயக்கத்தினைப் பகுப்பாய்வுசெய்யும் போது,புவி ஒருபுள்ளி நிறையாகக் கருதப்படும். ஏனெனில் புவியின் அளவுடன் ஒப்பிடும் போது. புவிக்கும் சூரியனுக்கும் உள்ளதொலைவுமிகஅதிகம்.

- காற்றில் வீசிஎறியப்பட்டசிறியகல் போன்ற ஒழுங்கற்றவடிவமுடைய பொருளின் இயக்கத்தினைப் பகுப்பாய்வு செய்யும் போது, இந்தக் கல்லினை ஒரு புள்ளி நிறையாகக் கருதலாம். ஏனென்றால், கல் கடந்த தொலைவுடன் ஒப்பிடும் போது,கல்லின் அளவு மிகச்சிறியது.

இயக்கத்தின் வகைகள்

அன்றாட வாழ்வில் கீழ்க்கண்டவகையான இயக்கங்களைநாம் காணலாம்.

அ)நேர்க்கோட்டு இயக்கம்
ஒருபொருள் நேர்க்கோட்டில் இயங்கினால் அவ்வியக்கம் நேர்க்கோட்டு இயக்கம் எனஅழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

- நேரானஓடுபாதையில் ஓடும் தடகளவீரர்
- புவியினைநோக்கிவிழும் பொருள்

ஆ) வட்ட இயக்கம்.
வட்டப்பாதையில் இயங்கும் பொருளின் இயக்கம்,வட்ட இயக்கம் எனஅழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

- கயிற்றில் கட்டப்படும் சுழற்றப்படும் கல்
- புவியினைச் சுற்றிவரும் செயற்கைக் கோளின் இயக்கம்

இ. சுழற்சி இயக்கம்

எந்த ஒரு திண்மப்பொருளும் ஒருஅச்சினைப் பொறுத்துசுழலும் போது. அவ்வியக்கம் சுழற்சி இயக்கம் என அழைக்கப்படும். அச்சுழற்சியின் போதுதிண்மப்பொருளில் உள்ளஎந்தஒருபுள்ளியும் அவ்வச்சினை பொறுத்துவட்ட இயக்கத்தை மேற்கொள்ளும். (சுழல் அச்சில் உள்ளபுள்ளியைத் தவிர்த்து)

எடுத்துக்காட்டுகள்

- அச்சினைப் பொறுத்துசுழலும் வட்டவடிவத்தட்டு
- அச்சினைப் பொறுத்துதன்னைத்தானேசுற்றும் புவி

ஈ) அதிர்வு இயக்கம்

பொருளொன்று நிலையான ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து முன்னும் பின்னும் இயக்கத்தினை மேற்கொண்டால், அவ்வியக்கம் அதிர்வியக்கம் எனப்படும். சில நேரங்களில் இவ்வியக்கம் அலைவு இயக்கம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

- கிட்டார் (Guitar) இசைக்கருவியில் உள்ளஅதிர்வடையம் கம்பி
- ஊஞ்சலின் இயக்கம்

மேலே கூறப்பட்ட இயக்கங்கள் மட்டுமல்லாமல் நீள்வட்ட இயக்கம் மற்றும் வரிச்சுரள் இயக்கம் (Helical) போன்றவேறு இயககங்களும் நடைமுறையில் சாத்தியமாகும்.

ஒருபரிமாண, இரு பரிமாணமற்றம் முப்பரிமாண இயக்கம்

வெளியில் (Space) உள்ள துகள் ஒன்றின் நிலையானது x,y, மற்றும் z செங்குத்து ஆய அச்சுகளின் அடிப்படையில் வரையறை செய்யப்படுகிறது எனக்கருதுக. இந்த ஆய அச்சு எண்கள் நேரத்தைப் பொறுத்து மாற்றமடையும் போது,துகள் இயக்கத்தில் உள்ளது எனக்கூறலாம். இருப்பினும் மூன்று ஆய அச்சுக்கூறு எண்களும் நேரத்தைப் பொறுத்து மாற்றமடைய வேண்டிய அவசியமில்லை. ஏதேனும் ஒன்று அல்லது இரண்டு ஆய அச்சுக்கூறு எண்கள் நேரத்தைப் பொருத்து மாற்றம் அடைந்தாலும், துகள் இயக்கத்தில் உள்ளது எனக்கூறலாம். எனவே ஒரு பொருளின் இயக்கம் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்படுகிறது.

(i) ஒருபரிமாண இயக்கம்

துகள் ஒன்று நேர்க்கொட்டில் இயங்கினால் அவ்வியக்கம் ஒருபரிமாண இயக்கம் எனப்படும். சில நேரங்களில் இவ்வியக்கம் நேர்க்கோட்டு இயக்கம் (Linear motion/Rectilinear motion) எனவும் அழைக்கப்படும், இவ்வகை இயக்கத்தில் மூன்று செங்குத்து ஆய அச்சுகளில் ஏதேனும் ஒரு ஆய அச்சுக்கூறு எண் மட்டுமே நேரத்தைப் பொறுத்து மாற்றமடையும். எடுத்துக்காட்டாக, A புள்ளியில் இருந்து B புள்ளிக்கு x திசையில் நகரும் பொருளின் இயக்கம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு x ஆய அச்சில் மட்டுமேமாற்றம் ஏற்படுகிறது என்பதை கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

- நேரான இருப்புப்பாதையில் இயங்கும் இரயில் வண்டி
- புவிஈர்ப்புவிசையால் தடையின்றிதானேவிழும் பொருள்.

ii) இரு பரிமாண இயக்கம்

தளம் ஒன்றில் வளைவுபாதையில் இயங்கும் துகளின் இயக்கத்தினை, இரு பரிமாண இயக்கம் என்று அழைக்கலாம். இவ்வகை இயக்கத்தில் மூன்று செங்குத்து ஆய அச்சுகளில் இரண்டு ஆய அச்சுகள் மட்டுமே நேரத்தைப் பொருத்து மாற்றமடையும். துகள் ஒன்று y-zதளத்தில் இயங்கும் போதுx- ஆய அச்சு எண்ணில் எவ்விதமாற்றமும் இல்லைஆனால் yமற்றும் zஆய அச்சுஎண்களில் மாற்றம் ஏற்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

- கேரம் பலகையில் (Carrom board) இயங்கும் வில்லை
- அறைஒன்றின் தளத்தில் அல்லதுசுவற்றில் ஊர்ந்துசெல்லும் பூச்சி

(iii) முப்பரிமாண இயக்கம்

முப்பரிமாண வெளியில் இயங்கும் துகளின் இயக்கம்,முப்பரிமாண இயக்கம் எனப்படும். இவ்வகை இயக்கத்தில் மூன்று ஆய அச்சுக்கூறுகளும்,நேரத்தைப் பொருத்துமாற்றமடையும்,துகளின் முப்பரிமாண இயக்கத்தில், ஆய அச்சுக்கூறுகள் x,y மற்றும் z ஆகிய மூன்றும் மாற்றமடையும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

- வானில் பறக்கும் பறவை
- ஒழுங்கற்ற முறையில் இயங்கும் வாயு மூலக்கூறுகள்
- வானில் பறக்கும் பட்டம்

<u>வெக்டர் இயற்கணிதம் பற்றிய அடிப்படைக் கருத்துகள்</u>

இயற்பியலில், சிலஅளவுகள் எண் மதிப்பை மட்டுமே பெற்றுள்ளன. வேறு சில அளவுகள் எண்மதிப்பு மற்றும் திசை இரண்டையும் பெற்றுள்ளன. இந்த இயற்பியல் அளவுகளைப் புரிந்து கொள்வதற்கு, வெக்டர் மற்றும் ஸ்கேலரின் பண்புகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது அவசியமாகும்.

<u>ஸ்கேலர்</u>

எண் மதிப்பினால் மட்டுமே குறிப்பிடக்கூடிய அளவுகள் ஸ்கேலர் எனப்படும். இயற்பியலில் பல்வேறு அளவுகள் ஸ்கேலரால் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

கடந்ததொலைவு,நிறை,வெப்பநிலை,வேகம் மற்றும் ஆற்றல்

வெக்டர்

எண் மதிப்பு மற்றும் திசை இவை இரண்டினாலும் குறிப்பிடக்கூடிய அளவுகள் வெக்டர் எனப்படும். வடிவ கணித முறையில் வெக்டர் என்பதுஒருகுறிப்பிட்டதிசையைக் காட்டும் கோட்டுத்துண்டு ஆகும். இது படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இயற்பியலில் சில அளவுகள் வெக்டரால் மட்டுமேகுறிப்பிட இயலும்.

வடிவ கணிதமுறையில் குறிப்பிட்டவெக்டர்

எடுத்துக்காட்டுகள்

- விசை,திசைவேகம், இடப்பெயர்ச்சி,நிலைவெக்டர்,முடுக்கம்,நேர்க்கோட்டுஉந்தம் மற்றும் கோணஉந்தம்.

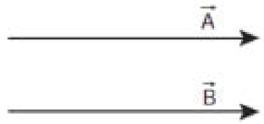
<u>2.3.1 வெக்டரின் எண்மதிப்பு</u>

ஒருவெக்டரின் நீளம் அதன் எண் மதிப்பு எனப்படும். இது எப்போதும் நேர்க்குறிமதிப்புபெற்றிருக்கும். சிலநேரங்களில் வெக்டரின் எண் மதிப்பு வெக்டரின் தரம் (Norm of the vector) எனவும் அழைக்கப்படும். $\dot{A}$ என்றவெக்டரின் மதிப்பு $|\vec{A}|$ அல்லதுஎளிமையாக'A' எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது:.

வெக்டரின் எண்மதிப்பு

2.3.2.வெக்டரின் வகைகள்

1. சமவெக்டர்கள் : $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்றஇரண்டுவெக்டர்கள் ஒரேஎண்மதிப்பையும்,ஒரேதிசையிலும் செயல்பட்டுஒரே இயற்பியல் அளவினைக் குறிப்பிட்டால்,அவ்வெக்டர்கள் சமவெக்டர்கள் என்றுஅழைக்கப்படும்.



வடிவ கணிதமுறையில் சமவெக்டர்கள்

அ) ஒருகோட்டுவெக்டர்கள் : ஓரேகோட்டின் வழியேசெயல்படும் வெக்டர்கள் ஒருகோட்டுவெக்டர்கள் என்றுஅழைக்கப்படுகிறது. அவ்வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்டகோணம் $0°$அல்லது $180°$ஆகும். ஒருகோட்டுவெக்டர்கள் இரண்டுவகைப்படும்.

(i) இணைவெக்டர்கள்: $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டுவெக்டர்கள் ஒரேதிசையிலும் இணைகோடுகள் வழியாகவும் செயல்பட்டால்அவற்றை இணைவெக்டர்கள் என்றுஅழைக்கலாம். இணைகோடுகள் வழியேசெயல்படுவதால் அவற்றுக்கு இடையேஉள்ளகோணம் $0°$ஆகும்.

(ii) எதிர் - இணைவெக்டர்கள்: $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டுவெக்டர்கள் எதிரெதிர்திசையில் ஒரேகோட்டில் அல்லது இணைகோடுகள் வழியாகசெயல்பட்டால் அவற்றைஎதிர்-இணைவெக்டர்கள் என்றுஅழைக்கலாம்.

(2)ஓரலகுவெக்டர்:ஒருவெக்டரைஅதன் எண்மதிப்பால் வகுக்கக்கிடைப்பதுஓரலகுவெக்டர் ஆகும். $\dot{A}$ வெக்டரின் ஓரலகுவெக்டர் $\hat{A}$ எனக் குறிப்பிடப்படும் (Aகேப் அல்லதுAஹேட் (hat) எனப் படிக்கவும்) இதன் எண்மதிப்புஒன்றுஅல்லதுஓரலகுஆகும்.

$\hat{A} = \frac{\dot{A}}{A}$ எனவே $\dot{A} = A\hat{A}$ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே,ஓரலகுவெக்டர்,வெக்டரின் திசையினைமட்டுமேகாட்டும்.

(3) செங்குத்துஓரலகுவெக்டர்கள்: மூன்று ஓரலகு வெக்டர்கள் $\hat{i}$, $\hat{j}$ மற்றும் $\hat{k}$ ஆகியவற்றைக் கருதுக. இந்த மூன்று ஓரலகுவெக்டர்களும் x,yமற்றும் zஅச்சின் நேர்குறி திசையினைக் காட்டுகின்றன. இவற்றில், எந்த இரண்டு ஓரலகு வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ளகோணம் $90°$ஆகும். இவ்வாறு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகச் செயல்படும் ஓரலகு வெக்டர்களுக்கு செங்குத்து ஓரலகு வெக்டர்கள் என்றும் பெயர். இங்கு $\hat{i}$, $\hat{j}$ மற்றும் $\hat{k}$ என்பவை செங்குத்து ஓரலகு வெக்டர்களைக் குறிக்கிறது.

வெக்டர்களின் கூடுதல்

வெக்டர்கள், எண் மதிப்பு மற்றும் திசை இவ்விரண்டையும் பெற்றுள்ளதால், சாதாரண இயற்கணிதமுறையில் அவற்றின் கூடுதலைக் காண இயலாது. எனவே,வெக்டர்களைவடிவியல் முறையிலோ அல்லுத பகுப்பு முறையிலோ சில விதிகளைப் பயன்படுத்தி அவற்றின் கூடுதலைக் காணவேண்டும். இம்முறைக்கு வெக்டர் இயற்கணிதம் என்றுபெயர். ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த

நிலையில் உள்ள இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலை (தொகுபயன்) (i) வெக்டர்களின் முக்கோணக் கூட்டல் விதி (ii) வெக்டர்களின் இணைகர விதி ஆகிய இரண்டு விதிகளைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

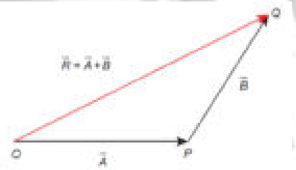
வெக்டர்களின் முக்கோணவிதி:

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டுவெக்டர்களின் தொகுபயனைவெக்டர்களின் முக்கோணக் கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்திகாணலாம்.

இரண்டுவெக்டர்களின் தொகுபயனை, வெக்டர்களின் முக்கோண விதியினை பயன்படுத்ததி கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம். $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டுசுழியற்ற வெக்டர்கள் வரிசைபடி ஓர முக்கோணத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கருதப்பட்டால், அவற்றின் தொகுபயன், எதிர்வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட அம்முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்தினால் குறிப்பிடப்படும். இது பின்வருமாறு விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$\dot{A}$ வெக்டரின் தலைப்பகுதி $\dot{B}$ வெக்டரின் வால்பகுதியோடு இணைக்கப்பட்டுள்ளது $\dot{A}$ வெக்டர் மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர்களுக்கு இடையேஉள்ளகோணம் θ என்க. $\dot{A}$ வெக்டரின் வால்பகுதியையும் $\dot{B}$ இன் தலைப்பகுதியையும் இணைத்தால் தொகுபயன் வெக்டர் $\dot{R}$ இன் எண்மதிப்புஅதன் நீளம் OQக்குச் சமம். மேலும் தொகுபயன் வெக்டர் $\dot{R}$ மற்றும் $\dot{A}$ வெக்டருக்கு இடையேஉள்ளகோணம்,தொகுபயன் வெக்டரின் திசையைக் கொடுக்கும். எனவே $\dot{R} = \dot{A} + \dot{B}$ எனஎழுதலாம். ஏனெனில்

$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overrightarrow{PQ}$



வெக்டர்களின் முக்கோணக்கூட்டல் விதி

(1) தொகுபயன் வெக்டரின் எண்மதிப்பு

தொகுபயன் வெக்டரின் எண்மதிப்புமற்றும் திசைகீழ்க்கண்டவாறுகணக்கிடப்படுகிறது.

படத்தில் ABNஎன்றசெங்கோணமுக்கோணத்தைக் கருதுக. படத்தில் OAஎன்றபக்கத்தைONவரைநீட்டுவதன் மூலம் ABNஎன்றசெங்கோணமுக்கோணம் கிடைக்கிறது.

$$\cos\theta = \frac{AN}{B} \therefore AN = B\cos\theta \text{ மற்றும்}$$

$$\sin\theta = \frac{BN}{B} \therefore BN = B\sin\theta$$

$$\Delta OBN \text{ ல் } OB^2 = ON^2 + BN^2$$

$\Rightarrow R^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2\cos^2\theta + 2AB\cos\theta + B^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

இச்சமன்பாடு $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர்களின் தொகுபயன் வெக்டரின் எண்மதிப்பைத் தருகிறது.

(2) தொகுபயன் வெக்டரின் திசை:

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர் இடையேஉள்ளகோணம் θ எனில்

$$\left|\dot{A}+\dot{B}\right|\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$\dot{R}$ வெக்டர் $\dot{A}$ வெக்டருடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் α எனில் ΔOBN ல்

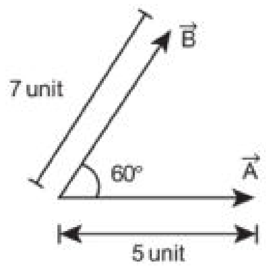
$$\tan\alpha = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{OA+AN}$$

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று 60° கோணத்தில் சாய்ந்த நிலையில் உள்ளன. அவற்றின் எண் மதிப்புகள் முறையெ 5 அலகுகள் மற்றும் 7 அலகுகள் ஆகும். தொகுபயன் வெக்டரின் எண் மதிப்பு மற்றும் $\dot{A}$ யைப் பொருத்து தொகுபயன் வெக்டரின் திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.



தீர்வு

வெக்டர்களின் முக்கோணவிதிப்படிதொகுபயன் வெக்டர் $\dot{R} = \dot{A} + \dot{B}$ எனஎழுதலாம்.

கீழ்க்கண்டபடம் வெக்டர்களின் கூடுதலைஎவ்வாறுமுக்கோணவிதியின்அடிப்படையில் காணலாம் என்பதைவிளக்குகிறது.

தொகுபயன் வெக்டரின் ($\dot{R}$) எண் மதிப்பு

$$R = \left|\dot{R}\right| = \sqrt{5^2+7^2+2\times5\times7\cos60^\circ}$$

$$\sqrt{25+49+\frac{70\times1}{2}} = \sqrt{109} \quad \text{அலகுகள்}$$

$\dot{R}$ மற்றும் $\dot{A}$ க்கு இடையே உள்ளகோணம் α (தொகுபயன் வெக்டரின் திசை) கீழ்க்கண்டவாறுகணக்கிடப்படுகிறது.

$$\tan = \alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

எனவே,

$$\tan\alpha = \frac{7\times\sin60^\circ}{5+7\cos60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{10+7} = \frac{7\sqrt{3}}{17} \cong 0.713$$

$$\therefore \alpha \cong 35^\circ$$

வெக்டர்களின் கழித்தல்:

வெக்டர்கள் எண்ம திப்பையும், திசையையும் பெற்றிருப்பதால் அவற்றை சாதாரண இயற்கணித விதிகளைப் பயன்படுத்திக் கழிக்க முடியாது. எனவேவெக்டர் கழித்தலை வடிவியல் முறை அல்லது பகுப்புமுறையில் காணவேண்டும். வடிவியல் முறையில் இரண்டு வெக்டர்களைஎவ்வாறு கழிக்கவேண்டும் என்பதை படத்தில் காணலாம்.

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டு சுழியற்ற வெக்டர்கள் θ கோணத்தில் ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்தநிலையில் உள்ளன. $\dot{A}-\dot{B}$ ன் தொகுபயன் மதிப்பு கீழ்க்காணுமாறு பெறப்படுகிறது. $\dot{B}$ ஐப் பெறவேண்டும். $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ க்கு இடைப்பட்டகோணம் $180° - \theta$ ஆகும்.

வெக்டர்களின் கழித்தல்

$\dot{A}, \dot{B}$ இன் வேறுபாடு $\dot{A}-\dot{B}$ என்பதை, $\dot{A}+(-\dot{B})$ என்றும் எழுதலாம்.

சமன்பாடு (2.1)லிருந்து

$$\left|\dot{A}-\dot{B}\right| = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(180°-\theta)}$$

இங்கு $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$$\Rightarrow \left|\dot{A}-\dot{B}\right| = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

சமன்பாடு 2.2 ஐப் போன்றமற்றொருசமன்பாட்டிலிருந்து

$$\tan\alpha_2 = \frac{B\sin(180°-\theta)}{A+B\cos(180°-\theta)}$$

ஆனால் $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$$\Rightarrow \tan\alpha_2 = \frac{B\sin\theta}{A-B\cos\theta}$$

$\dot{A}, \dot{B}$ வெக்டர்களின் வேறுபாடு $(\dot{A}-\dot{B})$ ஒருவெக்டராகும். மேலும் அதன் எண்மதிப்புமற்றும் திசையைசமன்பாடுகள் (2.4) மற்றும் (2.6) ஆகியவைகொடுக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று 60°கோணத்தில் சாய்ந்தநிலையில் உள்ளன. அவற்றின் எண்மதிப்புகள் முறையே 5 அலகுகள் மற்றும் 7 அலகுகள் ஆகும். தொகுபயன் வெக்டர் $\dot{A}-\dot{B}$ ன் எண்மதிப்பையும், $\dot{A}$ வெக்டரைப் பொருத்துதொகுபயன் வெக்டர் $\dot{A}-\dot{B}$ திசையையும் காண்க.

தீர்வு:

சமன்பாடு (2.4) லிருந்து

$$\left|\overline{A}-\overline{B}\right| = \sqrt{5^2+7^2-2\times5\times7\cos60°}$$

$$= \sqrt{25+49-35} = \sqrt{39} \text{ அலகுகள்}$$

$\dot{A}$ வெக்டரைப் பொருத்து $\dot{A}-\dot{B}$ ஏற்படுத்தும் திசை

$$\alpha^2 = \tan^{-1}(4.041) \cong 76°$$

2.4 வெக்டர் கூறுகள் (COMPONENTS OF A VECTOR)

கார்டீசியன் ஆய அச்சுத்தொகுப்பில்,எந்த ஒரு வெக்டரையும $(\dot{A})$x,y மற்றும் zஅச்சின்திசையில் செயல்படும் மூன்று கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

முப்பரிமாண ஆய அச்சுத்தொகுப்பின் படி வெக்டர் ஒன்றை $(\dot{A})$ அதன் கூறுகளாக கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\dot{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_2\hat{k}$$

இரு பரிமாணகார்டீசியன் ஆய அச்சுத்தொகுப்பு

முப்பரிமாணகார்டீசியன் ஆய அச்சுத்தொகுப்பு

இரு பரிமாணமற்றும் முப்பரிமாணவெக்டர் கூறுகள்

இங்குA_x என்பதுx - அச்சில் $\dot{A}$ வெக்டரின் கூறு.

A_y என்பதுy - அச்சில் $\dot{A}$ வெக்டரின் கூறு.

மற்றும்

A_z என்பதுz - அச்சில் $\dot{A}$ வெக்டரின் கூறு.

இரு பரிமாண ஆய அச்சுத் தொகுப்பின் படிவெக்டர் $\dot{A}$ இன் கூறுகளைகீழ்க்கண்டவாறுஎழுதலாம்.

$$\dot{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$\dot{A}$ ஆனதுxஅச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ,மேலும் A_x மற்றும் A_y என்பவைxஅச்சுமற்றும் yஅச்சில் $\dot{A}$ வெக்டரின் கூறுகள்.

$A_x = A\cos\theta$

$A_y = A\sin\theta$

இங்கு'A'என்பது $\dot{A}$ வெக்டரின் எண்மதிப்பு (நீளம்) ஆகும்.

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$$

வெக்டர் பகுப்பு

எடுத்துக்காட்டு 2.3

எதிர்க்குறிx,yமற்றும் zஅச்சுத் திசையில் செயல்படும் ஓரலகுவெக்டர்கள் யாவை?

தீர்வு

பின்வரும் படம்,எதிர்க்குறிx,yமற்றும் zஅச்சுதிசையில் செயல்படும் ஓரலகுவெக்டர்களைக் காட்டுகிறது.

படத்திலிருந்து, எதிர்க்குறி x அச்சு y அச்சு மற்றும் z அச்சு திசைகளில் செயல்படும் ஓரலகுவெக்டர்கள் முறையே$-\hat{i}$, - $\hat{j}$ மற்றும் -$\hat{k}$ ஆகும்.

2.4.1. வெக்டர் கூறுகளின் அடிப்படையில் வெக்டர்களின் கூடுதல்

இதுவரை வடிவியல் முறையில் இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தல் ஆகியவற்றைப் பற்றிப் படித்தோம். தற்போது ஆய அச்சுத் தொகுப்பினைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் மற்றும் அவற்றின் கழித்தலைஎளிமையாகக் காணலாம் என்பதைப் பற்றிப் படிக்கலாம்.

கார்டீசியன் ஆய அச்சுத் தொகுப்பில் உள்ள இரண்டுவெக்டர்களை($\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$) கீழ்க்காணுமாறுஎழுதலாம்.

$$\dot{A} + = A_x\hat{i} + A_y j + A_z k$$

$$\dot{B} = B_x\hat{i} + B_y j + B_z k$$

கொடுக்கப்பட்ட இவ்விரண்டுவெக்டர்களின் x,yமற்றும் zஅச்சுகளின் எண்களின் கூடுதலானது இவ்விரண்டுவெக்டர்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். அதாவது

$$\dot{A} + \dot{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)j + (A_z + B_z)k$$

இதே போன்றுவெக்டர்களின் கழித்தலையம் காணலாம்.

$$\dot{A} + \dot{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)j + (A_z - B_z)k$$

மேற்கண்ட இரண்டவிதிகளும் பகுப்புமுறையில் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தலைக் காண்பதற்கான வழிமுறையைக் கொடுக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டுவெக்டர்கள் அவற்றின் கூறுகள் வடிவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $\dot{A}=5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}$ மற்றும் $\dot{B}=6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ எனில் கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க

$$\overline{A}+\overline{B},\ \overline{B}+\overline{A},\ \overline{A}-\overline{B},\ \vec{B}-\vec{A}$$

தீர்வு:

$$\dot{A}-\dot{B}=(5\hat{i}+7j-4k)+(6\hat{i}+3j-2k)$$
$$=11\hat{i}+10j-2k$$
$$\dot{B}+\dot{A}=(6\hat{i}+3j+2k)+(5\hat{i}+7j-2k)$$
$$=(6+5)\hat{i}+(3+7)j+(2-4)k$$
$$=11\hat{i}+10j-2k$$
$$\dot{A}-\dot{B}=(5\hat{i}+7j-4k)-(6\hat{i}+3j+2k)$$
$$=-\hat{i}+4j-6k$$
$$\dot{B}-\dot{A}=\hat{i}-4j+6k$$

$\dot{A}+\dot{B}$ மற்றும் $\dot{B}+\dot{A}$ ஒன்றுக்கொன்றுசமம். ஆனால் $\dot{A}-\dot{B}$ மற்றும் $\dot{B}-\dot{A}$ ஆகியவைஒன்றுக்கொன்றுஎதிராகஉள்ளதைகவனிக்கவும்.

<u>2.5 ஒரு ஸ்கேலரால் வெக்டரைப் பெருக்குதல்</u>

ஒரு ஸ்கேலரால் வெக்டரைப் பெருக்கும் போது,மற்றொருவெக்டர் கிடைக்கும். λஎன்ற ஒருநேர்க்குறி எண்ணை $\dot{A}$ வெக்டருடன் பெருக்கும் போது, கிடைக்கும் வெக்டர் $\lambda\dot{A}$ ஆகும். இதன் திசை $\dot{A}$ இன் திசையிலேயே இருக்கும். ஆனால் λஒரு எதிர்க்குறி எண் எனில் $\lambda\dot{A}$ இன் திசை $\dot{A}$ வெக்டரின் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$\dot{A}=2\hat{i}+3\hat{j}$ எனில் $3\dot{A}$ ஐக் காண்க

தீர்வு

$$3\dot{A}+=3(2\hat{i}+3j)=6\hat{i}+9j$$

$\dot{A}$ வெக்டரின் திசை $\dot{A}$ வெக்டரின் திசையிலேயே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள $\dot{A}$ வெக்டரிலிருந்து $4\dot{A}$ மற்றும் $-4\dot{A}$ ஐக் காண்க

தீர்வு

இயற்பியலில் சிலவெக்டர் அளவுகள்,மற்றொருவெக்டரின் ஸ்கேலர் மடங்காக இருப்பதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

(1) விசை $\vec{F}=m\overline{a}$ இங்கு நிறை'm' ஒரு நேர்க்குறி ஸ்கேலர் மற்றும் முடுக்கம் $\overline{a}$ ஒருவெக்டர் ஆகும். இங்குவிசையின் திசையிலேயே பொருள் முடுக்கமடைகிறது.

(2) உந்தம் $\dot{p}=m\overline{v}$ இங்கு $\overline{v}$ என்பது பொருளின் திசைவேகம். எனவே இங்குபொருள் இயங்கும் திசையிலேயே நேர்க்கோட்டு உந்தமும் செயல்கடுகிறது.

(3) ஒரு மின்புலத்தால்,மின்னூட்டமுள்ள ஒரு துகளின் மீதுசெயல்படும் விசை $\vec{F} = q\vec{E}$ இங்கு q என்பதுமின்னூட்டம்,ஒரு ஸ்கேலர் மற்றும் மின்புலம் $\vec{E}$ ஒருவெக்டர். விசை $\vec{F}$ இன் திசைமின்னூட்டம் நேர்க்குறிஎனில் $\vec{E}$ ன்திசையிலும் மின்னூட்டம் எதிர்க்குறிஎனில் $\vec{E}$ திசைக்குஎதிர்த்திசையிலும் இருக்கும்.

2.5.1. இரண்டுவெக்டர்களின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் (புள்ளிப் பெருக்கல்)

வரையறை

இரண்டு வெக்டர்களின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் (புள்ளிப் பெருக்கல்) என்பது, அவ்விரண்டு வெக்டர்களின் எண்மதிப்புகள் மற்றும் அவ்விரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் கொசைன் மதிப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமமாகும்.

$\vec{A}$ மற்றும் $\vec{B}$ என்ற இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θஎனில் அவற்றின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் கீழ்க்காணுமாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$\vec{A}, \vec{B} = AB\cos\theta$ இங்குAமற்றும் Bஆகியவை $\vec{A}$ மற்றும் $\vec{B}$ வெக்டர்களின் எண்மதிப்புகள் ஆகும்.

பண்புகள்

i. ஸ்கேலர் பெருக்கலின் தொகுபயன் மதிப்புஎப்போதும் ஒரு ஸ்கேலர் ஆகும். இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் குறுங்கோணம் எனில் ($\theta<90°$) ஸ்கேலர் பெருக்கலின் எண்மதிப்பு நேர்குறியுடனும், விரிகோணம் எனில் ($90°<\theta<180°$) எதிர்குறியுடனும் இருக்கும்.

ii. ஸ்கேலர் பெருக்கல் பரிமாற்றுவிதிக்கு உட்பட்டது. அதாவது $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

iii. ஸ்கேலர் பெருக்கல் பங்கீட்டுவிதிக்கு உட்பட்டது. அதாவது $\vec{A}.(\vec{B}+\overline{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\overline{C}$

iv. ஸ்கேலர் பெருக்கலின் படி இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right]$$

v. இரண்டு வெக்டர்கள் இணையாக உள்ளபோது அதாவது θ=0°எனில் அவற்றின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் பெருமம் ஆகும். ஏனெனில் cos 0°=1

$(\vec{A}.\vec{B})_{\text{பெருமம்}}$ =AB

vi. இரண்டு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிராக உள்ளபோது அதாவதுθ=180°எனில் அவற்றின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் சிறுமம் ஆகும். ஏனெனில் cos 180°= -1

$(\vec{A}.\vec{B})_{\text{சிறுமம்}}$= - AB

vii. இரண்டு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்றுெ சங்குத்தாக உள்ளபோது, அதாவதுθ=90°எனில் அவற்றின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் சுழியாகும். ஏனெனில் cos 90°= 0 எனவே அந்த வெக்டர்களை, செங்குத்து வெக்டர்கள் (orthogonal vectors) என அழைக்கலாம்.

viii. ஒரு வெக்டர், அதே வெக்டருடன் ஸ்கேலர் பெருக்கல் செய்யப்பட்டால், அதற்கு தற்சார்பு ஸ்கேலர் பெருக்கல் என்றுபெயர். $(\vec{A})^2 = \vec{A}.\vec{A} = AA\cos\theta A^2$. இங்குகோணம் θ=0°

A - இன் மதிப்பு$|\vec{A}|$= A=$\sqrt{\overline{A}.\overline{A}}$

ix. ஓரலகுவெக்டர் $\hat{n}$ ஐக் கருதும்போது $\hat{n}.\hat{n}$ =1x1x cos 0° =1 எடுத்துக்காட்டாக

$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

x. செங்குத்து ஓரலகு வெக்டர்களைக் கருதும்போது ($\hat{i}, \hat{j}$ மற்றும் $\hat{k}$)

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 1.1\cos 90° = 0$

xi. வெக்டர் கூறுகளின் அடிப்படையில் $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர்களின் ஸ்கேலர் பெருக்கலைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\dot{A}.\dot{B} = (A_x\hat{i} + A_y j + A_2 k).(B_x\hat{i} + B_y j + B_2 k)$$

$$\overline{A}.\overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

மற்றஅனைத்துப் பெருக்கற்பலன்களும் சுழியாகும்.

$\dot{A}$ - இன் எண் மதிப்பு $\left|\dot{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_2^2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.7

கொடுக்கப்பட்ட $\dot{A}=2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ மற்றும் $\dot{B}=\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ வெக்டர்களின் ஸ்கேலர் பெருக்கல் $\dot{A}$, $\dot{B}$ மற்றும் $\dot{A}$, $\dot{B}$ இன் எண் மதிப்புகளையும் காண்க. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட இவ்விரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்டகோணத்தின் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 2 + 12 + 30 = 44$$

$\dot{A}$ வெக்டரின் எண்மதிப்பு

A = $\sqrt{4+16+25} = \sqrt{45}$ அலகுகள்

$\dot{B}$ வெக்டரின் எண்மதிப்பு

B = $\sqrt{1+9+36} = \sqrt{46}$ அலகுகள்

இரண்டு வெக்டர்களுக்கும் இடைப்பட்டகோணம்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{A}.\overrightarrow{B}}{AB}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{44}{\sqrt{45\times46}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{44}{45.49}\right)$$

$$= \cos^{-1}(0.967)$$

$$\therefore \theta \cong 15^\circ$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வெக்டர்களா என ஆராய்க.

i. $\dot{A} = 2\dot{i} - 3j$ மற்றும் $\dot{B} = 4\dot{i} - 5j$

ii. $\dot{C} = 5\dot{i} - 2j$ மற்றும் $\dot{D} = 2\dot{i} - 5j$

தீர்வு

(i) $\dot{A}$, $\dot{B}$ =8-15 = -7$\neq$ 0

எனவே $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வெக்டர்கள் அல்ல.

(i) $\overline{C}$. $\dot{D}$ =10 -10 = 0

எனவே $\overline{C}$ மற்றும் $\dot{D}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துவெக்டர்கள் ஆகும்.

கீழ்க்காணும் படம் வடிவியல் முறையில் எவ்வாறு $\overline{C}$ மற்றும் $\dot{D}$ வெக்டர்கள் செங்குத்துவெக்டர்கள் என்பதைத் தெளிவாகக் காட்டுகிறது.

இயற்பியலில் $\dot{F}$ என்ற விசையினால் பொருளொன்று d$\dot{r}$ தொலைவு இடப்பெயர்ச்சி அடையும்போது, அவ்விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையை பின்வருமாறு வரையறை செய்யலாம்.

W = $\dot{F}$. d$\dot{r}$

$W = \dot{F} \cdot d\dot{r} \cos\theta$

விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை என்பது விசை வெக்டருக்கும், இடப்பெயர்ச்சி வெக்டருக்கும் இடையேயான ஸ்கேலர் பெருக்கல் ஆகும். வேலையைப் போலவே மேலும் பல்வேறு இயற்பியல் அளவுகளும் ஸ்கேலர் பெருக்கலினால் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளன என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்.

2.5.2. இரண்டுவெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல்

வரையறை

இரண்டு வெக்டர்களின், வெக்டர் பெருக்கல் அல்லது குறுக்கு பெருக்கல் செய்யும் போது கிடைக்கும் தொகுபயன் வெக்டரின் எண்மதிப்பானது, அவ்விரு வெக்டர்களின் எண் மதிப்புகளின் பெருக்கல்பலன் மற்றும் அவ்வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன்மதிப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமமாகும். மேலும் வலதுகை திருகுவிதி அல்லது வலதுகை பெருவிரல் விதியின் அடிப்படையில், தொகுபயன் வெக்டரின் திசையானது. இரண்டுவெக்டர்களின் தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் இருக்கும்.

$\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலினால் கிடைக்கும் தொகுபயன் வெக்டர் $\overline{C}$ ஐ கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$\overline{C} = \dot{A} \times \dot{B} = (AB \sin\theta)\,\hat{n}$

$\dot{A} \times \dot{B}$ இன் அலகுவெக்டர் $\hat{n}$ ன் திசை,அதாவது $\overline{C}$ ன் திசை, $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர்களினாலான தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். மேலும் வலதுகை திருகு ஒன்றை $\dot{A}$ வெக்டரில் இருந்து (முதல் வெக்டர்) $\dot{B}$ வெக்டரைநோக்கி (இரண்டாவதுவெக்டர்) அவற்றின் சிறியகோணத்தின் வழியே சுழற்றும் போது திருகு முன்னேறும் திசையில் $\overline{C}$ வெக்டரின் திசை இருக்கும்.

வெக்டர் பெருக்கலின் (குறுக்குப் பெருக்கல்) பண்புகள்

(ஸ)இரண்டு வெக்டர்களின்,வெக்டர் பெருக்கல் மற்றொருவெக்டரையே தரும். அவ்வெக்டரின்

வெக்டர் பெருக்கல் (குறுக்குப் பெருக்கல்)

$\dot{A}$ மற்றும $\dot{B}$ ஆகியவற்றின் வெக்டர் பெருக்கலினால் $\dot{A} \times \dot{B}$ கிடைக்கும் மூன்றாவது வெக்டர் $\overline{C}$ ஆனது.

இரண்டுவெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல்

திசை, அவ்விரண்டு வெக்டர்களினாலான தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். மேலும் $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தாலும், இல்லையென்றாலும் தொகுபயன் வெக்டர் இவ்விரண்டு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும்.

a. இரண்டு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் பரிமாற்று விதிக்கு உட்படாது அதாவது $\dot{A} \times \dot{B} \neq \dot{B} \times \dot{A}$ ஆனால் $\dot{A} \times \dot{B} = -[\dot{B} \times \dot{A}]$மேலும் $|\dot{A} \times \dot{B}| = |\dot{B} \times \dot{A}| = AB \sin\theta$, அதாவது $\dot{A} \times \dot{B}$ மற்றும் $\dot{B} \times \dot{A}$ இவற்றின் எண்மதிப்புகள் சமம். ஆனால் இவையிரண்டும் எதிரெதிர்திசையில் செயல்படும்.

b. இரண்டு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் $\sin\theta=1$என்றநிபந்தனையில் ($\theta=90°$) பெரும் மதிப்பைப் பெறும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்கள் எனில் வெக்டர் பெருக்கல் பெரும் மதிப்பைப் பெறும்.

$(\dot{A} \times \dot{B})_{\text{பெருமம்}} = AB\,\hat{n}$

c. இரண்டு சுழியற்ற வெக்டர்களின், வெக்டர் பெருக்கல் $\sin\theta=0$, என்ற நிபந்தனையில் ($\theta=0°$அல்லது $180°$) சிறும மதிப்பைப் பெறும்.$(\dot{A} \times \dot{B})_{\text{சிறுமம்}} = 0$. அதாவது கொடுக்கப்பட்ட

வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவோ அல்லது எதிராகவோ உள்ளபோது அவற்றின் வெக்டர் பெருக்கல் பலன் சுழியாகும்.

d. தற்சார்பு வெக்டர் பெருக்கல் அதாவது ஒருவெக்டரை அதே வெக்டருடன் குறுக்கு பெருக்கல் செய்யும்போது அது சுழிமதிப்பைப் பெறும். அதனை சுழிவெக்டர் என்று அழைக்கலாம். $\dot{A} \times \dot{A} =$ AA $\sin \theta° \hat{n} = \bar{0}$ இயற்பியலில் சுழிவெக்டர் எளிமையாகசுழி என்றே குறிக்கப்படுகிறது.

(ii) ஓரலகு வெக்டர்களின் தற்சார்புவெக்டர் பெருக்கலும் சுழியாகும். $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

(iii) வலது கை திருகுவிதியின்படி செங்குத்து ஓரலகு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் கீழ்க்கண்டவாறு காணப்படும்.

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ மற்றும் $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

மேலும், வெக்டர் பெருக்கல் பரிமாற்றுவிதிக்கு உட்படாததால், கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ மற்றும் $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(iv) வெக்டர் கூறு முறையில் இரண்டுவெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலை கீழ்க்கண்டவாறு கண்டறியலாம்.

$$\dot{A} \times \dot{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$+\hat{i}(A_y B_z - A_z B_y)$$
$$+j(A_z B_x - A_x B_z)$$
$$+k(A_x B_y - A_y B_x)$$

குறிப்பு: $\hat{j}$ கூறின் பெருக்கலின் வரிசையானது $\hat{i}$ th கூறு மற்றும் $\hat{k}$ thகூறுகளின் பெருக்கலின் வரிசையிலிருந்து மாறுபட்டு உள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

(v) $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ என்ற இரண்டுவெக்டர்களை இணைக்கரம் ஒன்றின் அடுத்தடுத்தபக்கங்களாகக் கருதினால், $\dot{A} \times \dot{B}$ - ன் எண்மதிப்பு $|\dot{A} \times \dot{B}|$ அவ்விணைகரத்தின் பரப்பளவைக் கொடுக்கும்.

இணைகரம் ஒன்றின் பரப்பளவு

ஒரு இணைகரத்தைநாம் இரண்டுசமஅளவுள்ளமுக்கோணமாகப் பிரிக்கமுடியும். வெக்டர் $\dot{A}$ மற்றும் $\dot{B}$ இரு பக்கமாகக் கொண்டஒருமுக்கோணத்தின் பரப்பளவுஎன்பது $\frac{1}{2}|\dot{A} \times \dot{B}|$ க்குச் சமமாக இருக்கும்.

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

இயற்பியலில் பயன்படுத்தப்படும் பல்வேறு அளவுகள் வெக்டர் பெருக்கலின் வாயிலாக வரையறை செய்யப்படுகின்றன. குறிப்பாகச் சுழற்சியின் விளைவுகளை, எடுத்துக்காட்டும் திருப்புவிசை, கோண உந்தம் போன்ற அளவுகளை வரையறை செய்யும் போதுவெக்டர் பெருக்கல் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

i. திருப்புவிசை $\bar{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ இங்கு $\vec{F}$ என்பதுவிசைமற்றும் $\vec{r}$ என்பது பொருளின் நிலை வெக்டர் ஆகும்.

ii. கோணஉந்தம் $\vec{L} = \vec{r} \times \bar{p}$ இங்கு $\bar{p}$ என்பதுநேர்க்கோட்டுஉந்தமாகும்.

iii. நேர்க்கோட்டத் திசைவேகம் $\bar{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ இங்கு $\vec{\omega}$ என்பதுகோணத்திசைவேகமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

கொடுக்கப்பட்டவெக்டர் $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ மற்றும் வெக்டர் $\vec{F} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் வெக்டர் $\bar{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ஐ காண்க:

தீர்வு

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = (12 - (-10)\hat{i} + (15 - 8)j + (-4 - 9)k$$

$$\vec{\tau} = 22\hat{i} + 7j - 13k$$

2.5.3. வெக்டர் கூறுகளின் பண்புகள்

இரண்டு வெக்டர்கள் $\vec{A}$ மற்றும் $\vec{B}$ ஆகியவை ஒன்றுக் கொன்றுசமமாக இருப்பின், அவற்றின் கூறுகளும் ஒன்றுக்கொன்றுசமமாக இருக்கும்.

$\vec{A} = \vec{B}$ என்க. கூறு முறையில்

$$A_x\hat{i} + A_y j + A_z k = B_x\hat{i} + B_y j + B_z k$$

எனவே $A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் சமன்பாடுகளின் கூறுகளைஒப்பிடுக

அ) $\vec{F} = m\bar{a}$ இங்குmஒருநேர்க்குறிஎண்

ஆ) $\bar{p} = 0$

தீர்வு

நேர்வு : அ)

$$\vec{F} = m\bar{a}$$

$$F_x\hat{i} + F_y j + F_z k = ma_x\hat{i} + ma_y j + ma_2 k$$

வெக்டர் கூறுகளைஒப்பிடும் போது

$$F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z$$

இது நமக்கு உணர்த்துவது, ஒருவெக்டர் சமன்பாடு மூன்று ஸ்கேலர் சமன்பாடுகளுக்கு இணையானதாகும்.

நேர்வு : ஆ)

$$\bar{p} = 0$$

$$p_x\hat{i} + p_y j + p_z k = 0\hat{i} + 0j + 0k$$

வெக்டர் கூறுகளைஒப்பிடும் போது

$$p_x = 0, p_y = 0, p_z = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11

கொடுக்கப்பட்டவெக்டர் சமன்பாட்டிலிருந்து‘T’ ன் மதிப்பைக் காண்க:

$5\hat{j} - T\hat{j} = 6\hat{j} + 3T\hat{j}$

தீர்வு

வெக்டர் கூறுகளைஒப்பிடும்போது

$$5 - 6 = 3T + T$$
$$-1 = 4T$$
$$T = -\frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

கொடுக்கப்பட்டவெக்டர் சமன்பாட்டின் கூறுகளைஒப்பிடுக: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_4$

தீர்வு

கார்டீசியன் ஆய அச்சுத் தொகுப்பின் அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்டவெக்டர் சமன்பாட்டைx,yமற்றும் z கூறுகளாகப் பகுத்துஅதன் கூறுகளைஒப்பிடவேண்டும்.

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_{4x}$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_{4y}$$
$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = F_{4z}$$

2.6 நிலைவெக்டர் (POSITION VECTOR)

எந்தஒருகுறிப்பிட்டநேரத்திலும் துகள் ஒன்றின் நிலையினைக் குறிப்பாயம் அல்லது ஆய அச்சுத் தொகுப்பினைப் பொருத்துகுறிப்பிடும் வெக்டர்,நிலைவெக்டர் ஆகும்.

P என்றபுள்ளியில் உள்ளதுகள் ஒன்றின் நிலைவெக்டாரைகீழ்காணுமாறுகுறிப்பிடலாம்.

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

இங்கு x,y மற்றும் z ஆகியவை நிலைவெக்டர் $\vec{r}$ன் கூறுகள் ஆகும். மேலும் $\hat{i}$, $\hat{j}$ மற்றும் $\hat{k}$ ஆகியவை செங்குத்து அச்சுகளான x,y மற்றும் zஅச்சில் செயல்படும் செங்குத்து ஓரலகு வெக்டர்கள் ஆகும்.

கார்டீசியன் ஆய அச்சுத் தொகுப்பில் உள்ளநிலைவெக்டர்

எடுத்துக்காட்டு 2.13

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளP,Q,R,Sபுள்ளிகளில் உள்ளதுகள்களின் நிலைவெக்டர்களைக் காண்க

தீர்வு

P புள்ளியில் உள்ளதுகளின் நிலைவெக்டர் $\vec{r}_P = 3\hat{i}$

Q புள்ளியில் உள்ளதுகளின் நிலைவெக்டர் $\vec{r}_Q = 5\hat{i} + 4\hat{j}$

R புள்ளியில் உள்ளதுகளின் நிலைவெக்டர் $\vec{r}_R = -2\hat{i}$

S புள்ளியில் உள்ளதுகளின் நிலைவெக்டா $\vec{r}_S = 3\hat{i} - 6\hat{j}$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

தொடக்கத்தில் ஓய்வுநிலையில் உள்ளமனிதர் ஒருவர் (1) வடக்குநோக்கி 2 மீட்டரும் (2) கிழக்குநோக்கி 1 மீட்டரும் பின்பு (3) தெற்குநோக்கி 5 மீட்டரும் நடக்கிறார். இறுதியாக (4) மேற்குநோக்கி 3mநடந்து ஓய்வுநிலைக்கு வருகிறார். இறுதிநிலையில் அம்மனிதரின் நிலைவெக்டரைக் காண்க.

தீர்வு

படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு நேர்குறி x அச்சைகிழக்கு திசையாகவும், நேர்குறி y அச்சை வடக்கு திசையாகவும் கருதுக.

பயணமுடிவில் P புள்ளியை அடைந்தமனிதரின் நிலைவெக்டர் $\vec{r}=2\hat{i}-3\hat{j}$ ஆகும். மேலும் இடப்பெயர்ச்சியின் திசைதென் மேற்குஆகும்.

2.7 கடந்ததொலைவுமற்றும் இடப்பெயர்ச்சி

கடந்ததொலைவு

கொடுக்கப்பட்டகால இடைவெளியில் பொருள் கடந்து சென்றபாதையின் மொத்தநீளம் கடந்த தொலைவு எனப்படும். இது ஒரு நேர்க்குறி ஸ்கேலர் அளவுஆகும்.

இடப்பெயர்ச்சி

கொடுக்கப்பட்ட கால இடைவெளியில் பொருளின் இறுதி நிலைக்கும், அதன் ஆரம்பநிலைக்கும் உள்ள வேறுபாடு இடப்பெயர்ச்சிஎனப்படும். மேலும் பொருளின் இருநிலைகளுக்கு இடையே உள்ள மிகக்குறைந்த தொலைவுஎனவும் வரையறை செய்யலாம். இடப்பெயர்ச்சியின் திசையானது தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து இறுதிநிலைப் புள்ளியை நோக்கி இருக்கும். இது ஒருவெக்டர் அளவாகும். படத்தில் இடப்பெயர்ச்சிக்கும், கடந்த தொலைவிற்கும் உள்ளே வறுபாட்டினைத் தெளிவாகக் காட்டுகிறது.

இடப்பெயர்ச்சிமற்றும் கடந்ததொலைவு

எடுத்துக்காட்டு 2.15

உங்கள் பள்ளிக்கூடம் உங்கள் வீட்டிலிருந்து 2kmதொலைவில் உள்ளது எனக கருதுக. வீட்டிலிருந்து பள்ளிக்கூடத்திற்கும், பின்னர் மாலை பள்ளிக்கூடத்திற்கும், பின்னர் மாலை பள்ளிக்கூடத்திலிருந்து வீட்டிற்கும் வருகிறீர்கள் எனில், இந்நிகழ்ச்சியில் நீங்கள் கடந்துசென்ற தொலைவு மற்றும் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சிஎன்ன?

தீர்வு:

இந்தபயணத்தில் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சிசுழி, ஏனெனில் ஆரம்பநிலை மற்றும் இறுதிநிலைஆகிய இரண்டும் ஒரேபுள்ளியாகும். ஆனால் கடந்ததொலைவு 4kmஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16

ஒரு தடகளவீரர் 50m ஆரமுடைய வட்டவடிவ ஓடு பாதையில் மூன்று முறை சுற்றி வருகிறார். அவர் கடந்த தொலைவு மற்றும் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு

துடகள வீரர் கடந்த தொலைவு

= 3x ஓடு பாதையின் சுற்றளவு

= $3 \times 2\pi \times 50m = 300\,\pi m$

(அல்லது)

கடந்த தொலைவு= $300 \times 3.14 = 942m$

தடகள வீரர் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சி சுழி, ஏனெனில் தடகள வீரரின் தொடக்க நிலை மற்றும் இறுதிநிலை ஆகியவை ஒரே புள்ளியில் உள்ளன.

2.7.1. கார்டீசியன் ஆய அச்சுத்தொகுப்பில் இடப்பெயர்ச்சிவெக்டர்

நிலை வெக்டரை அடிப்படையாகக் கொண்டு இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரை எவ்வாறு அமைப்பது என்பது பின்வருமாறு விளக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் ஒன்றுநிலைவெக்டர் $\vec{r}_1=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$ கொண்ட P_1 புள்ளியிலிருந்து நிலை வெக்டர் $\vec{r}_2=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}$ கொண்ட P_2 புள்ளிக்கு நகர்கின்றது என்க. இத்துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

இடப்பெயர்ச்சிவெக்டர்

எடுத்துக்காட்டு 2.17

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு துகள் ஒன்று P புள்ளியிலிருந்து Q புள்ளிக்கு நகர்கின்றது எனில், அத்துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் மற்றும் இடப்பெயர்ச்சியின் எண் மதிப்பையும் காண்க.

தீர்வு

இடப்பெயர்ச்சிவெக்டர் $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

இங்கு

$\vec{r}_1 = \hat{i} + j$ மற்றும் $\vec{r}_2 = 4\hat{i} + 2j$

$\therefore \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (4\hat{i} + 2j) - (\hat{i} + j)$

$= (4 - 1)\ \hat{i} + (2 - 1)\ j$

$\therefore \Delta\vec{r} = 3\hat{i} + j$

இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரின் எண்மதிப்பு $\Delta \vec{r} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ அலகு.

2.8 வகைநுண்கணிதம் (Differential Calculus)

சார்புபற்றியகருத்து (Concept of a function)

i. எந்த ஒரு இயற்பியல் அளவும், கணிதவியலின் ஒரு சார்பாக (function) குறிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக வெப்பநிலை T ஐக் கருதுவோம். சுற்றுச்சூழலின் வெப்பம் நாள் முழுவதும் ஒரே சீராக இருப்பதில்லை. அது நண்பகலில் அதிகரிக்கவும், மாலை வேளையில் குறையவும் செய்கிறது.

ii. நாம் கருதும் எந்தவொரு "t" நேரத்திலும் வெப்பநிலை T ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பினைப் பெற்றிருக்கும். கணிதவிதிகளின் அடிப்படையில் இதனை 'T(t)' எனக் குறிப்பிடலாம். மேலும் இதனை" நேரத்தைச் சார்ந்த வெப்பநிலை" என அழைக்கலாம். இதிலிருந்துநாம் அறிந்து கொள்வது என்னவெனில் நேரம் "t" கொடுக்கப்பட்டால் அந்தகுறிப்பிட்ட நேரத்தில் உள்ள வெப்பநிலையை சார்பு'T(t)'கொடுக்கும். இதே போன்று x அச்சின் திசையில் செல்லும் பேருந்து ஒன்றின் இயக்கத்தினை x(t) எனக் குறிப்பிடலாம். அதாவது x என்பது நேரத்தைச் சார்ந்த ஒருசார்பு ஆகும். இங்கு x என்பது அந்தபேருந்தின் x ஆய அச்சினைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு

$f(x) = x^2$ என்றசார்பைக் கருதுக. சில நேரங்களில் இதனை $y=x^2$ எனவும் குறிப்பிடலாம். இங்கு yஎன்பது x ஐச் சார்ந்த மாறி,ஆனால் x என்பது சார்பற்றமாறி ஆகும். x ல் மாற்றம் ஏற்படும் போதெல்லாம் yயிலும் மாற்றம் ஏற்படும் என்பதை இது உணர்த்துகிறது.

இயற்பியல் அளவு ஒன்றினைச் சார்புவடிவில் குறிப்பிட்டபின்பு, அந்தசார்பு நேரத்தைப் பொருத்து எவ்வாறு மாறுபடுகிறது (அல்லது) இயற்பியல் அளவு சார்பற்ற மாறிகளைப் பொருத்து எவ்வாறு மாறுபடுகிறது என்பதை அறியலாம். எந்தஒரு இயற்பியல் அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தையும் பகுத்து ஆராய நுண்கணிதம் (Calculus) என்றகணிதவியலின் பிரிவுபயன்படுத்தப்படுகிறது.

y= f(x) என்பது ஒரு சார்பு எனில் x ஐப் பொருத்துy இன் முதல் வகைக்கெழுவை $\frac{dy}{dx}$ எனக்குறிப்பிடலாம். கணிதவியலின் படிy = f(x) என்பதுx இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு y இல் ஏற்படும் மாற்றத்தை எடுத்துக் காட்டுகிறது.

கணித கோட்பாட்டின் படிவகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δx சுழியினை நெருங்கும்போது ($\Delta x \to 0$) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ அடையும் எல்லையை $\frac{dy}{dx}$ காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.18

$y = x^2$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. 'சார்புஎல்லை' கருத்தைப் பயன்படுத்தி$x = 2$என்றபுள்ளியில் அதன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

தீர்வு

$x_1 = 2$ மற்றும் $x_2 = 3$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளைக் கருதினால் $y_1 = 4$ மற்றும் $y_2 = 9$என்ற இரண்டு புள்ளிகள் கிடைக்கும்.

இங்கு $\Delta x = 1$ மற்றும் $\Delta y = 5$

எனவே, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-4}{3-2} = 5$

$x_1 = 2$ மற்றும் $x_2 = 2.5$ எனில் $y_1 = 4$ மற்றும் $y_2 = (2.5)^2 = 6.25$ எனக் கிடைக்கும்

இங்கு $\Delta x = 0.5 = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\Delta y = 2.25$

எனவே, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6.25-4}{0.5} = 4.5$

$x_1 = 2$மற்றும் $x_2 = 2.25$ எனில் $y_1 = 4$மற்றும் $y_2 = 5.0625$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு$\Delta x = 0.25 = \frac{1}{4}$ மற்றும$\Delta y = 1.0625$எனவே,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5.0625-4}{0.25} = \frac{(5.0625-4)}{\frac{1}{4}}$$

$$= 4(5.0625 - 4) = 4.25$$

$x_1 = 2$ மற்றும் $x_2 = 2.1$ எனில் $y_1 = 4$மற்றும் $y_2 = 4.41$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு$\Delta x = 0.1 = \frac{1}{10}$ மற்றும்$\Delta y = 0.41$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4.41-4)}{\frac{1}{10}} = 10(4.41-4) = 4.1$$

முடிவுகள் கீழ்க்கண்டவாறுஅட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

2	2.25	0.25	4	5.0625	4.25
2	2.1	0.1	4	4.41	4.1
2	2.01	0.01	4	4.0401	4.01
2	2.001	0.001	4	4.004001	4.001
2	2.0001	0.0001	4	4.00040001	4.0001

மேற்கண்ட
அட்டவணையிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறலாம்.

- Δx சுழியினை நெருங்கும் போது $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ எண்மதிப்பு 4 என்ற எல்லையை நெருங்குகிறது.
- $x = 2$ என்ற புள்ளியில்,வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}=4$ ஆகும்.
- மற்றொரு கவனிக்க வேண்டிய அம்சம் என்னவெனில், $\Delta x\rightarrow$ என்பதை$\Delta x=0$எனக் கருதக்கூடாது. ஏனெனில் $\Delta x = 0$ என்று பிரதியிட்டால் $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ஐ வரையறுக்கமுடியாது.
- பொதுவாகசார்பு $y= x^2$ ன் வகைக் கெழுவைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

பின்வரும் அட்டவணை இயற்பியலில் பயன்படுத்தப்படும் சில பொதுவான சார்புகளையும்,அவற்றின் வகைக் கெழுக்களையும் காட்டுகிறது.

சார்பு	**வகைக்கெழு**
$y = x$	$dy/dx = 1$
$y = x^2$	$dy/dx = 2x$
$y = x^3$	$dy/dx = 3x^2$
$y = x^n$	$dy/dx = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$dy/dx = \cos x$
$y = \cos x$	$dy/dx = -\sin x$
y = மாறிலி	$dy/dx = 0$
$y = AB$	$dy/dx = \left(\frac{dB}{dx}\right)+\left(\frac{dA}{dx}\right)B$

இயற்பியலில், திசைவேகம், வேகம் மற்றும் முடுக்கம் ஆகியவை நேரம் t ஐப் பொருத்தவகைக் கெழுக்கள் ஆகும். அவற்றைப் பற்றி அடுத்த பகுதியில் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.19

கொடுக்கப்பட்ட சார்புx $= A_0+ A_1t+ A_2t^2$ ன் வகைக்கெழுவினை t ஐ பொறுத்துக் காண்க. இங்கு A_0, A_1மற்றும் A_2 ஆகியவை மாறிலிகள் ஆகும்.

தீர்வு

இங்கு சார்பற்ற மாறி tமற்றும் சார்புடைய மாறி x ஆகும். நமக்குத் தேவையான வகைக்கெழு

$dx/dt = 0+A_1+2 A_2 t$

இரண்டாம் படிவகைக்கெழு $\frac{d^2x}{dt^2}$ =2 A_2 ஆகும்.

2.9 தொகைநுண்கணிதம் (Integral Calculus)

தொகையிடல் என்பது பரப்பினைக் கண்டறியும் ஒரு செயலாகும். சில ஒழுங்கான வடிவங்களுக்கு எளிதாகபரப்பினைக் கண்டறியலாம். ஆனால் ஒழுங்கற்ற வடிவங்களின் பரப்பினை அவ்வாறு காண முடியாது. இத்தகைய நேர்வுகளில் தொகை நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி எளிமையாக பரப்பினைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள செவ்வகம் மற்றும் ஒழுங்கற்ற வளைகோடு ஆகியவற்றைக் கருதுக. செவ்வகத்தின் பரப்புA=நீளம் xஅகலம்= (b-a)cஎன எளிதாகக் கண்டறியலாம். ஆனால் ஒழுங்கற்ற வளைகோட்டின் கீழே அமையும் பரப்பை அவ்வாறு காண முடியாது.

f(x) என்றசார்பாகக் கருதப்படும் ஒழுங்கற்றவளை கோட்டிற்கு கீழே உள்ளபரப்பினைப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. செவ்வகப் பட்டைகளாகப் பிரித்து, அவற்றின் கூடுதலை ஒழுங்கற்றவளை கோட்டிற்குக் கீழே உள்ளபரப்பின் தோராயமாகக் கொள்ளலாம்.

$$A = f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x$$

இங்குf(a) என்பதுx = a என்றநிலையில் f(x) இன் மதிப்பாகும். மேலும் $f(x_1)$ என்பதுx = x_1என்றநிலையில் f(x) இன் மதிப்பாகும். இவ்வாறே மற்ற மதிப்புகளையும் காண வேண்டும். செவ்வகப் பட்டைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது, பரப்பை அளவிடுதலின் துல்லியத்தன்மை மென்மேலும் அதிகரிக்கும்.

வளை கோட்டிற்குக் கீழே உள்ளபரப்பினை N பட்டைகளாகப் பகுக்கும்போது, வளைகோட்டிற்குக் கீழே உள்ள பரப்பை

$$A = A \approx \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\Delta x_n$$

எனக் குறிப்பிடலாம்.

செவ்வகப் பட்டைகளின் எண்ணிக்கை ஈறிலாமதிப்பினைநெருங்கும் போது$N\to\infty$ அவற்றின் கூடுதல், தொகையிடலாக மாறுகிறது.

$$A = \int_a^b F(x)\,dx$$

(குறிப்பு $N \to \infty$ எனில் $\Delta x \to 0$)

இந்தத் தொகையிடல் வளைகோடு f(x)க்கு கீழே உள்ள மொத்தப் பரப்பினைக் கொடுக்கிறது.

கூடுதலுக்கும் தொகையிடலுக்கும் உள்ளதொடர்பு

எடுத்துக்காட்டுகள்:

பொருளொன்று a புள்ளியிலிருந்து b புள்ளிக்கு ஒருபரிமாண இயக்கத்தில் நகரும்போது விசை f(x) ஆல் செய்யப்பட்ட வேலையை கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

(இங்கு ஸ்கேலர் பெருக்கல் அவசியமில்லை. ஏனெனில் பொருள் ஒர்பரிமாண இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது)

1) விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை, விசை-இடப்பெயர்ச்சி வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ள பரப்பிற்குச் சமம்.

விசையினால் செய்யப்பட்டவேலை

2) t=0 மற்றும் t= t_1 என்ற சிறியகால இடைவெளியில் விசையினால் ஏற்பட்ட கணத்தாக்கைெ தாகையிடல் மூலம் கணக்கிடலாம்.

கணத்தாக்குI = $\int_0^{t_1} Fdt$

விசைச் சார்பு F (t) மற்றும் நேரம் (t) வரைபடத்தின் பரப்பு, கணத்தாக்கிற்குச் சமம்.

சராசரித் திசைவேகம்

தொடக்கத்தில் Pஎன்ற புள்ளியில் உள்ளதுகள் ஒன்றைக் கருதுக. அதன் நிலைவெக்டர் $\dot{r}_1$ஆகும்.Δt என்ற சிறியகால இடைவெளியில் அத்துகள் Qஎன்ற புள்ளியை அடைகிறது. ஆதன் நிலைவெக்டர் $\dot{r}_2$ ஆகும் துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் $\Delta\dot{r} = \dot{r}_2 - \dot{r}_1$ இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் மற்றும் அதற்கானகால இடைவெளி ஆகியவற்றின் விகிதம் சராசரிதிசை வேகத்தினைக் கொடுக்கும்.

$$\dot{v}_{avg} = \frac{\Delta\dot{r}}{\Delta t}$$

இது ஒருவெக்டர் அளவாகும். சராசரித் திவைவேகத்தின் திசை, இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரின் திசையில் ($\Delta\dot{r}$) அமையும்.

சராசரிவேகம்

துகள் கடந்து சென்றபாதையின் மொத்த நீளத்திற்கும், எடுத்துக் கொண்ட கால இடைவெளிக்கும் உள்ளதகவு, சராசரி வேகமாகும்.

சராசரிவேகம் = பாதையின் மொத்தநீளம் /மொத்த நேரம்

எடுத்துக்காட்டு 2.20

படத்தில் உள்ளவாறு பொருளொன்று O புள்ளியிலிருந்து P புள்ளிக்கு 5 வினாடியில் கடந்துசெல்கிறது. அப்பொருளின் சராசரித் திசைவேகம் மற்றும் சராசரிவேகம் ஆகியவற்றைகாண்க:

சராசரி திசைவேகம் $\dot{v}_{avg} = \frac{\dot{r}_p - \dot{r}_o}{\Delta t}$

இங்கு $\Delta t = 5\,s$

$$\bar{r}_o = 0$$

$$\dot{r}_p = 10\hat{i}$$

$$\dot{v}_{avg} = \frac{10\hat{i}}{5} = 2\hat{i}cms^{-1}$$

சராசரித் திசைவேகம் நேர்க்குறி x அச்சு திசையில் உள்ளது.

$$\text{சராசரிவேகம்} = \frac{\text{பாதையின் மொத்த நீளம்}}{\text{மொத்த நேரம்}}$$

$$= \frac{5\pi\, cm}{5} = \pi cms^{-1} \approx 3.14cms^{-1}$$

இங்கு சராசரி வேகம், சராசரித் திசைவேகத்தை விட அதிகம் என்பதைப் புரிந்து கொள்ளவேண்டும்.

உடனடித் திசைவேகம் (அல்லது) திசைவேகம்.

t நேரத்தில் இருக்கும் உடனடித் திசைவேகம் அல்லது எளிமையாக t நேரத்தில் திசைவேகம் என்பது $\Delta t \to 0$.என்ற நிபந்தனையில் கிடைக்கப் பெறும் சராசரித் திசைவேகம் ஆகும்.

மேலும் திசைவேகம் என்பது நேரத்தைப் பொருத்து நிலைவெக்டர் மாறும் வீதமாகும். இது ஒருவெக்டர் அளவாகும்.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

வெக்டர் கூறுமுறையில் துகள் ஒன்றின் திசைவேகம்

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y j + z k)$$

$$\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

இங்கு $\frac{dx}{dt} = v_x =$ திசைவேகத்தின் x கூறு

$\frac{dy}{dt} = v_y =$ திசைவேகத்தின் y கூறு

$\frac{dz}{dt} = v_z =$ திசைவேகத்தின் z கூறு

திசைவேகத்தின் எண்மதிப்புவேகம் எனப்படும் அதனை v எனகுறிப்பிடலாம்.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

வேகம் எப்போதும் ஒருநேர்க்குறி ஸ்கேலர் ஆகும். வேகத்தின் அலகு $m\,s^{-1}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.21

துகளொன்றின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = 2t\,\hat{i} + 3t^2\,\hat{j} - 5\hat{k}$

அ) t என்ற எந்தவொரு நேரத்திலும் உள்ள திசைவேகம் மற்றும் வேகத்தினைக் கணக்கிடுக:

ஆ) t= 2 வினாடி என்ற நேரத்தில் உள்ள திசைவேகம் மற்றும் வேகத்தினைக் கணக்கிடுக

தீர்வு:

திசைவேகம் $\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{i} + 6t\,\hat{j}$

$v(t) = \sqrt{2^2 + (6t)^2}\ ms^{-1}$

t = 2 வினாடியில் துகளின் திசைவேகம் $\bar{v}\,(2s) = 2\hat{i} + 12\hat{j}$

t = 2 வினாடியில் துகளின் திசைவேகம்

$$v(2s) = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{4 + 144}$$

$$\sqrt{148} \approx 12.16\,m\,s^{-1}$$

துகளானது x, y திசைகளில் திசைவேகத்தின் கூறுகளைப் பெற்றுள்ளது z திசையில் நிலைவெக்டர் (-5) என்றமாறாத மதிப்பினைப் பெற்றுள்ளது. இது நேரத்தைச் சார்ந்ததல்ல. எனவேz- திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு சுழியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

A,B மற்றும் Cஎன்ற மூன்று துகள்களின் திசைவேகங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் எந்தத் துகள் அதிகவேகத்தில் செல்லும்.

$$\overline{v_A} = 3\hat{i} - 5j + 2k$$

$$\overline{v_B} = \hat{i} + 2j + 3k$$

$$\overline{v_C} = 5\hat{i} + 3j + 4k$$

தீர்வு:

நாம் அறிந்தபடிவேகம் என்பது, திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு ஆகும். எனவே,

A துகளின் வேகம் $\left|v_A^{'}\right| = \sqrt{(3)^2+(-5)^2+(2)^2}$

$\sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}\, m\, s^{-1}$

B துகளின் வேகம் $\left|v_B^{'}\right| = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2}$

$\sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}\, m\, s^{-1}$

C துகளின் வேகம் $\left|v_C^{'}\right| = \sqrt{(5)^2+(3)^2+(4)^2}$

$\sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}\, m\, s^{-1}$

C துகள் மற்ற துகள்களை விட வேகமாகச் செல்லும்

$\sqrt{50} > \sqrt{38} > \sqrt{14}$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

இரண்டுகார்களில் ஒன்று $\bar{v}_1$ =10 ms^{-1} என்ற திசைவேகத்தில் கிழக்காகவும் மற்றொன்று $\bar{v}_2$ =10 ms^{-1} என்ற திசைவேகத்தில் மேற்காகவும் செல்கின்றன. அவற்றின் வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

இரண்டு கார்களும் வெவ்வேறான திசையில் ஒரே எண்மதிப்புடைய திசைவேகத்தில் செல்கின்றன. எனவே இரண்டுகார்களும் வெவ்வேறுதிசைவேகத்தில் செல்கின்றனஎனக் கருதலாம். ஆனால் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்புவேகம் ஆகும். இதற்குத் திசை இல்லை. எனவே இரண்டுகார்களும் வெவ்வேறு வரிசைகளில் சென்றாலும் சமவேகத்தில் செல்கின்றன என்பதைஅறியலாம்.

உந்தம் துகள் ஒன்றின் நேர்க்கோட்டு உந்தம் அல்லது உந்தம் என்பது அத்துகளின் நிறைக்கும், அதன் திசைவேகத்திற்கும் உள்ள பெருக்கற்பலன் ஆகும். இதனை எனக் குறிப்பிடலாம். இது ஒருவெக்டர் அளவுஆகும். $\bar{p}$ = m$\bar{v}$.

திசைவேகத்தின் திசையிலேயே உந்தத்தின் திசையும் இருக்கும். உந்தத்தின் எண்மதிப்புதுகளின் நிறை மற்றும் வேகத்தின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமம். p= mv

கூறுமுறையில் உந்தத்தினை பின் வருமாறுகுறிப்பிடலாம். $p_x\hat{i} + p_y j + p_z k = mv_x\hat{i} + mv_y j + mv_z k$

இங்கு

P_x =உந்தத்தின் x -கூறு, இது mv_xக்குச் சமம்

P_y =உந்தத்தின் y -கூறு, இது mv_yக்குச் சமம்

P_z =உந்தத்தின் z -கூறு, இது mv_zக்குச் சமம்

நியூட்டன் விதிகளில் உந்தத்தின் பங்கு மிக முக்கியமானதாகும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டிலிருந்து உந்தத்தின் இயற்பியல் முக்கியத்துவத்தினை அறியலாம். ஒரு வண்ணத்துப்பூச்சி சிறிய கல் ஆகிய இரண்டும் 5ms^{-1} என்ற திசைவேகத்தில் உங்கள் மீது மோதுகிறது என்க. மோதலின் விளைவுகள் இரண்டும் சமமாக இருப்பதில்லை. ஏனெனில் விளைவு திசைவேகத்தினை மட்டும் பொருத்ததில்லை. நிறையையும் பொருத்தது.

.

சிறிய கல்லின் நிறை, வண்ணத்துப்பூச்சியின் நிறையை விட அதிகம். எனவே சிறிய கல்லின் உந்தம் வண்ணத்துப் பூச்சியின் உந்தத்தை விட அதிகம். ஆகவே இயக்கத்தில் உள்ள பொருளின் நிலையை விளக்குவதில் உந்தத்தின் பங்குமிக அதிகமாகும்.

உந்தத்தின் அலகுkg m s^{-1}ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.24

10g மற்றும் 1kg நிறைகொண்ட இரண்டு பொருட்கள் 10 ms^{-1} என்ற ஒரே வேகத்தில் செல்கின்றன. அவற்றின் உந்தங்களின் எண்மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

p = mv என்க.

10gநிறையுடையபொருளின் உந்தம்.

P=0.01x10=0.1 kg ms^{-1}

1kg நிறையுடையபொருளின் உந்தம்.

P=1x10=10 kg ms^{-1}

இரண்டும் ஒரேவேகத்தில் சென்றாலும் கனமானபொருளின் உந்தம்,லேசானபொருளின் உந்தத்தைவிட 100 மடங்குஅதிகம் என்பதை இந்தஎடுத்துக்காட்டிலிருந்துஅறியலாம்.

2.10 ஒருபரிமாண இயக்கம்

2.10.1 சராசரித் திசைவேகம்

துகளொன்று ஒரு பரிமாணத்தில் இயங்குகிறது என்க. எடுத்துக்காட்டாக x திசையில் இயங்குகிறது என்று எடுத்துக்கொண்டால் அத்துகளின் சராசரித் திசைவேகம்

$$=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

சராசரித் திசைவேகம் ஒருவெக்டர் அளவாகும். ஆனால் ஒரு பரிமாணத்தில் நமக்கு இரண்டு திசைகள் மட்டுமே சாத்தியம் (நேர்க்குறிமற்றும் எதிர்க்குறிxதிசை) எனவேதிசையிகைக் குறிக்க நேர்க்குறிமற்றும் எதிர்க்குறி இரண்டினையும் பயன்படுத்தலாம்.

உடனடித் திசைவேகம் அல்லது திசை வேகத்தினைப் பின்வருமாறுவரையறுக்கலாம்.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

வரைபடமுறையில் துகளின் இடப்பெயர்ச்சி நேரம் வரைபடத்தின் சாய்வு, துகளின் திசைவேகத்தினைக் கொடுக்கும். அதே நேரத்தில் துகளின் திசைவெகம்- நேரம் வரைபடத்தின் வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ளபரப்பு இடப்பெயர்ச்சி மற்றும் கடந்ததொலைவினைக் கொடுக்கும். அதனைப் பினவருமாறுவிளக்கலாம்.

நாமறிந்தபடி,திசைவேகம் $=\frac{dx}{dt}$ = v

எனவேdx= vdtஎனஎழுதலாம்.

இரண்டுபக்கமும் தொகைப்படுத்த $\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ எனக்கிடைக்கும்.

முற்பகுதியில் கூறப்பட்டபடிதொகையிடல் என்பது வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ள பரப்பினைக் காண்பதற்குச் சமம். எனவே $\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ என்றபதம் திசைவேகம், காலத்தின் சார்பாகஉள்ளபோதுஏற்படும் வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ளபரப்பினைக் குறிக்கிறது.

இடதுகைப் பக்கமுள்ள தொகையிடல் t_1 நேரத்திலிருந்து t_2 நேரத்தில்துகள் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது. திசைவேகம்

2.10.1 ஒருபரிமாணமற்றும் இருபரிமாண இயக்கத்தில் சார்புத் திசைவேகம்

A மற்றும் Bஎன்ற இரண்டுபொருட்கள் வெவ்வேறு திசைவேகங்களில் செல்கின்றன என்க. B பொருளைப் பொருத்து A பொருளின் திசைவேகம் என்பதுBபொருளைப் பொருத்து A பொருளின் சார்புத் திசைவேகம் எனப்படும்.

நேர்வு -1

A,Bஎன்ற இரண்டுபொருள்கள் படத்தில் உள்ளவாறுV_A மற்றும் V_Bஎன்ற சீரான திசைவேகங்களில் நேர்க்கோட்டுப்பாதையில் தரையைப் பொருத்துஒரேதிசையில் செல்கின்றன.

$V_A^{'}$, $V_B^{'}$

B பொருளைப் பொருத்துAபொருளின் சார்புத்திசைவேகம் $\dot{V}_{AB} = \dot{V}_A - \dot{V}_B$

A பொருளைப் பொருத்து B பொருளின் சார்புத் திசைவேகம் $\dot{V}_{BA} = \dot{V}_B - \dot{V}_A$

எனவே, இரண்டு பொருட்கள் ஒரே திசையில் இயங்கும் போது. ஒருபொருளைப் பொருத்து மற்றொன்றின் சார்புத் திசைவேகத்தின் எண் மதிப்பு, இவ்விரண்டு பொருள்களின் திசைவேகங்களின் எண் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டிற்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.26

A மற்றும் Bஎன்ற இரண்டுகார்கள் இணையானபாதையில் ஒரேதிசையில் தரையைப் பொருத்துசீரானதிசைவேகத்தில் செல்கின்றன. A மற்றும் Bகார்களின் திசைவேகங்கள் முறையே 35km h^{-1}மற்றும் 40 km h^{-1}கிழக்காகசெல்கின்றன. Aகாரினைப் பொருத்துBகாரின் சார்புத் திசைவேகம் என்ன?

தீர்வு

Aகாரினைப் பொருத்து B காரின் சார்புத் திசைவேகம் $\bar{v}_{BA} = \bar{v}_B - \bar{v}_A = 5$ km h^{-1}கிழக்குதிசையில்

இதே போன்று B காரினைப் பொருத்து A காரின் சார்புத் திசைவேகம்

$\bar{v}_{AB} = \bar{v}_A - \bar{v}_B = 5$ km h^{-1} மேற்குத்திசையில் A காரில் உள்ளபயணிக்கு B காரானது கிழக்குநோக்கி 5km h^{-1}என்ற திசைவேகத்தில் செல்வதுபோன்று தோன்றும். Bகாரில் உள்ளபயணிக்குA காரானது மேற்கு நோக்கி5km h^{-1}என்ற திசைவேகத்தில் செல்வதுபோன்றுதோன்றும்.

நேர்வு– 2

A, B என்ற இரண்டு பொருட்கள் V_A மற்றும் V_Bஎன்ற சீரானதிசை வேகங்களில் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் திசையில் நேரான பாதையில் செல்கின்றன.

$\xrightarrow{V_A} \quad \xleftarrow{V_B}$

Bபொருளைப் பொருத்துA பொருளின் சார்புத் திசைவேகம்

$$\bar{V}_{AB} = -\bar{V}_A - (-\bar{V}_B) = \bar{V}_A + \vec{V}_B$$

Aபொருளைப் பொருத்துB பொருளின் சார்புத் திசைவேகம்

$$\bar{V}_{BA} = -\bar{V}_B - \bar{V}_A = -(\bar{V}_A + \bar{V}_B)$$

எனவே இரண்டுபொருட்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் திசையில் இயங்கும் போது, ஒருபொருளைப் பொருத்து மற்றொரு பொருளின் சார்புத் திசைவேகமானது, இரண்டுபொருட்களின் திசைவேகங்களின் எண் மதிப்புகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

நேர்வு– 3

$\bar{v}_A$ மற்றும் $\bar{v}_B$திசைவேகத்தில் இரண்டுபொருட்கள் θ கோணத்தில் இயங்கும் போது. B பொருளைப் பொருத்து A பொருளின் சார்புத் திசைவேகம் $\bar{v}_{AB} = \bar{v}_A - \bar{v}_B$

சார்புத் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு மற்றும் திசை கீழ்கண்டவாறு வழங்கப்படுகிறது.

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\theta} \text{ மற்றும்}$$

$$\tan\beta = \frac{v_B \sin\theta}{v_A - v_B\cos\theta}$$

(இங்கு β என்பது $\bar{v}_{AB}$ மற்றும் $\bar{v}_B$க்கு இடைப்பட்டகோணமாகும்.)

1. இரு பொருட்களும் நேரான இணைப் பாதையில் ஒரே திசையில் இயங்கும்போது$\theta = 0°$எனவே, $V_{AB} = (V_A - V_B)$ மேலும் V_{AB} இன் திசைV_A இன் திசையில் இருக்கும், இதே போன்று $V_{BA} = (V_B - V_A)$ மேலும் V_{BA} இன் திசைV_B இன் திசையில் இருக்கும்,
2. இரு பொருட்களும் நேரான இணைப் பாதையில் ஒன்றுக் கொன்றுஎதிர்த்திசையில் இயங்கும் போது$\theta = 180°$எனவே,

V_{AB} = (V_A+ V_B)மேலும் இதன் திசைV_A இன் திசையில் இருக்கும்,
இதே போன்று
V_{BA} = (V_B+V_A)மேலும் இதன் திசைV_B இன் திசையில் இருக்கும்,

3. இரு பொருட்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக செல்லும் போதுθ= 90°B பொருளைப் பொருத்து A பொருளின் சார்புத் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு $v_{AB} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2}$

4. குடை பிடித்த படி கிடைத்தளப் பாதையில் நடந்து செல்லும் மனிதரின் திசைவேகம் $\vec{V}_M$ என்க. அவரின் மீது செங்குத்தாக$\vec{V}_R$ திசைவேகத்தில் மழைபொழிகிறது எனில் மனிதரைப் பொருத்து மழையின் சார்புத் திசைவேகம் $\vec{V}_{RM}=\vec{V}_R-\vec{V}_M$

மேலும்$\vec{V}_{RM}$ இன் எண்மதிப்பு VRM = $\sqrt{V_R^2 + V_M^2}$ மற்றும் செங்குத்து அச்சைப் பொறுத்து

திசைθ= $\tan^{-1}\left[\frac{V_M}{V_R}\right]$

மழையிலிருந்து தன்னைப் பாதகாத்துக் கொள்ள மனிதர் செங்குத்து அச்சைப் பொறுத்து θ கோணத்தில் குடையினை சாய்த்துப் பிடிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.27

A மற்றும் B என்ற இரண்டுரயில் வண்டிகள் இணையான இரயில் பாதையில் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் திசையில் செல்கின்றன. இரயில் வண்டிA ன் திசைவேகம் கிழக்கு நோக்கி 40km h^{-1}மற்றும் இரயில் வண்டிB ன் திசைவேகம் மேற்குநோக்கி 40km h^{-1}இரயில் வண்டிகளின் சார்புத் திசைவேகங்களைக் காண்க.

தீர்வு
இரயில் வண்டிB ஐப் பொருத்து, இரயில் வண்டிA ன் சார்புத் திசைவேகம்,
V_{AB}= 80km h^{-1}கிழக்குே நாக்கி,அதாவது இரயில் வண்டிB ல் உள்ளபயணிக்கு இரயில் வண்டி A கிழக்குநோக்கி 80km h^{-1}திசைவேகத்தில் செல்வது போன்று தோன்றும். இரயில் வண்டிA ஐப் பொருத்து, இரயில் வண்டிB ன் சார்புத் திசைவேகம் V_{BA}= 80km

h^{-1} மேற்குநோக்கி, அதாவது இரயில் வண்டிA ல் உள்ள பயணிக்கு இரயில் வண்டி B மேற்குநோக்கி 80km h^{-1} திசைவேகத்தில் செல்வது போன்று தோன்றும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.28
A மற்றும் B என்ற இரண்டு இரயில் வண்டிகள் இணையான இரயில் பாதையில் ஒரே திசையில் கிழக்குநோக்கி 50km h^{-1} என்ற திசைவேகத்தில் செல்கின்றன. இரயில் வண்டிகளின் சார்புத் திசைவேகங்களைக் காண்க.

தீர்வு
இரயில் வண்டிAவைப் பொருத்து இரயில் வண்டிB ன் சார்புத் திசைவேகம்,
$V_{BA} = V_B - V_A$
$= 50km\ h^{-1} + (-50)km\ h^{-1}$
$= 0km\ h^{-1}$

இவ்வாறே, இரயில் வண்டி B ஐப் பொருத்து இரயில் வண்டி A ன் சார்புத் திசைவேகம் V_{AB} சுழியாகும்.

எனவே இந்த இரு இரயில் வண்டியும் ஒன்று மற்றொன்றைப் பொருத்து ஓய்வு நிலையில் இருப்பது போன்று தோன்றும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.29

36 km h^{-1} வேகத்தில் செல்லும் இரயில் வண்டியின் ஜன்னல் ஓரம் அமர்ந்திருக்கும் சிறுவன், எதிர் திசையில்18 km h^{-1} வேகத்தில் செல்லும் 90 m நீளமுள்ள இரயிலை எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பார்க்கமுடியும்.

தீர்வு

சிறுவனைப் பொருத்து எதிர்திசையில் செல்லும் இரயில் வண்டியின் சார்புத் திசைவேகம்

$= (36+18)\ km\ h^{-1} = 54\ km\ h^{-1}$

$= 54 x \frac{5}{18} m\ s^{-1} \qquad = 15 m\ s^{-1}$

சிறுவன் எதிர் திசையில் செல்லும் இரயில் வண்டியை முழுவதும் பார்ப்பதற்கான நேரத்தினைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$15 = \frac{90}{t}$ (அல்லது) $t = \frac{90}{15} = 6s$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

ஆற்றுநீரோட்டத்தின் திசையில் நீந்தும் நீச்சல் வீரரின் திசைவேகம் 12 km h^{-1}ஆற்று நீரோட்டத்தின் திசைக்கு எதிர்திசையில் அவரின் நீச்சல் திசைவேகம் 6 km h^{-1} எனில் அமைதி நிலையில் இருக்கும் நீரினைப் பொருத்து நீச்சல் வீரரின் வேகத்தையும் மற்றும் ஆற்று நீரோட்டத்தின் திசைவேகத்தையும் காண்க

தீர்வு:

தரையைப் பொருத்து நீச்சல் வீரர் மற்றும் ஆற்று நீரோட்டத்தின் திசைவேகங்கள் முறையே v_s மற்றும் v_rஎன்க

$v_s + v_r = 12 \qquad (1)$

மற்றும்

$v_s - v_r = 6 \qquad (2)$

இரண்டு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும் போது,

$2 v_s = 12 + 6 = 18\ km\ h^{-1}$ (அல்லது)

$v_s = 9\ km\ h^{-1}$

சமன்பாடு (1) ல் இருந்து

$9 + v_r = 12$ (அல்லது) $v_r = 3\ km\ h^{-1}$ நீச்சல் வீரர் ஆற்றுநீரோட்டம் பாய்ந்து கொண்டிருக்கும் அதேதிசையில் நீந்தும் போது அவரின் தொகுபயன் திசைவேகம் 12 km h^{-1}

முடுக்கிவிடப்பட்ட இயக்கம்:

சீரற்ற இயக்கத்தில் உள்ளபொருளின் திசைவேகம் ஒவ்வொரு நேரத்திலும் மாற்றமடைந்து கொண்டே இருக்கும். அதாவது திசைவேகம் நேரத்தைப் பொருத்துமாற்றமடைந்துகொண்டே இருக்கும். இவ்வகையான இயக்கத்திற்கு முடுக்கிவிடப்பட்ட இயக்கம் என்றுபெயர்.

i. முடுக்கி விடப்பட்ட இயக்கத்தில் ஓரலகு நேரத்தில் மாற்றமடைந்த பொருளின் திசைவேகம் சமமாக (மாறிலியாக) இருப்பின்,அப்பொருள் சீராக முடுக்கிவிடப்பட்ட இயக்கத்தில் உள்ளது எனக் கருதலாம்.

ii. ஓரலகு நேரத்தில் மாற்றமடைந்த பொருளின் திசைவேகம் வெவ்வேறு நேரத்தில் வெவ்வேறாக இருப்பின் அப்பொருள் சீரற்ற முடுக்கி விடப்பட்ட இயக்கத்தில் உள்ளது எனக் கருதலாம்.

சராசரிமுடுக்கம்:

$\Delta t = (t_2 - t_1)$ கால இடைவெளியில் திசைவேகம் $\vec{V}_1$ லிருந்து $\vec{V}_2$ க்கு மாற்றமடைந்த பொருளின் சராசரி முடுக்கத்தை, திசைவேக மாறுபாடு மற்றும் எடுத்துக்கொண்டகால இடைவெளி $\Delta t=(t_2-t_1)$ இவற்றின் தகவு என வரையறை செய்யலாம்.

எனவே $\bar{a}_{avg} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

சராசரிமுடுக்கம் ஒருவெக்டர் அளவாகும். அதன் திசை$\Delta \vec{V}$ ன் திசையில் இருக்கும்.

உடனடிமுடுக்கம்:

பொதுவாக சராசரி முடுக்கம், முழு கால இடைவெளியில் பொருளின் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டைக் கொடுக்கும். ஆனால் இது ஒரு குறிப்பிட்ட கண நேரத்தில் (t) திசைவேகத்தில் ஏற்பட்ட மாற்றத்தைக் கொடுக்காது.

Δt சுழியை நெருங்கும் போது, நேரத்தைப் பொருத்து திசை வேகத்தில் ஏற்பட்ட மாறுபாடு உடனடி முடுக்கம் அல்லது முடுக்கம் என அழைக்கப்படுகிறது.

முடுக்கம் $\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

வேறுவகையில் கூறின், வ நேரத்தில் பொருளின் முடுக்கமானது அந்நேரத்தில் ஏற்பட்ட திசைவேக மாறுபாட்டிற்குச் சமமாகும்.

i. முடுக்கம் ஒரு வெக்டர் அளவு ஆகும். இதன் SI அலகு ms^{-2} பரிமாண வாய்ப்பாடு $M^oL^1T^{-2}$

ii. திசைவேகம் அதிகரிக்கும் போது ற்படும் முடுக்கத்தை நேர்க்குறி முடுக்கம் எனவும் திசைவேகம் குறையும போது ஏற்படும் முடுக்கத்தை எதிர்க்குறி முடுக்கம் எனவும் அழைக்கிறோம். இதனை எதிர்முடுக்கம் என்றும் அழைக்கலாம். கூறு முறையில் முடுக்கத்தினை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம். இதிலிருந்து,

$$\dot{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt} j + \frac{dv_z}{dt} k = \frac{d\dot{v}}{dt}$$

எனவே,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

என அறியலாம். இவைகள் உடனடி முடுக்கத்தின் கூறுகள் ஆகும்.

திசைவேகத்தின் அனைத்து கூறுகளும், அதற்குத் தொடர்புடைய ஆய அச்சுக் கூறுகளின் வகைக்கெழுக்களாகும். இதே போன்று முடுக்கவெக்டர்a_x, a_y மற்றும் a_zஆகியவற்றைகீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

எனவே,முடுக்கவெக்டர் $\bar{a}$ ஐ கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$$\dot{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} j + \frac{d^2z}{dt^2} k = \frac{d^2\dot{r}}{dt^2}$$

மேற்கண்ட தொடர்பிலிருந்து முடுக்கம் நிலை வெக்டரின் நேரத்தைப் பொருத்த இரண்டாம் வகைக்கெழு என்று அறியலாம்.

வரைபடமுறையில் முடுக்கம் என்பதுதிசைவேகம் - நேரம் வரைபடத்தின் சாய்வு ஆகும்.

மேலும் வரைபடமுறையில் முடுக்கம் - நேரம் வரைபடம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ளபரப்பு திசைவேகத்தைக் கொடுக்கும்.

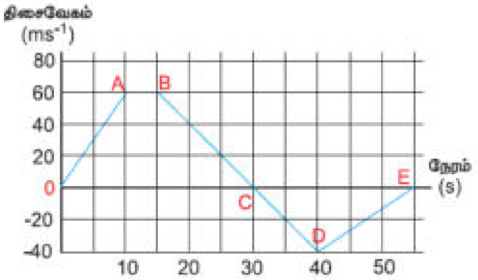
$\frac{dv}{dt}$ = a இதிலிருந்துdv = adtஎனஎழுதலாம்.

எனவேv= $\int_{t_1}^{t_2} a\,dt$

இங்குt_1 மற்றும் t_2தொடக்கமற்றும் இறுதிநேரத்தைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.31

x அச்சுத் திசையில் இயங்கும் துகளொன்றின் திசைவேகம் - நேரம் வரைபடம் பொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.



அ) 0 முதல் 55 வினாடி கால இடைவெளியில் துகளின் இயக்கத்தினை விளக்கவும்.

ஆ) 0 முதல் 40 வினாடிகால இடைவெளியில் துகள் கடந்ததொலைவு மற்றும் துகளின் இடப்பெயர்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

இ) t =5 வினாடி மற்றும் t=20 வினாடியில் துகளின் முடுக்கத்தினைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு:

அ) Oமுதல் Aவரை (0 வினாடிமுதல் 10 வினாடிவரை)

t = 0 வினாடியில் துகளின் திசைவேகம் சுழிஅதன் பின்புதுகள் நேர்க்குறிதிசைவேகத்தைப் பெறும். எனவேதுகள் நேர்க்குறிxதிசையில் இயங்கும். 0 வினாடியிலிருந்து 10 வினாடிவரைவளைகோட்டின் சாய்வு($\frac{dv}{dt}$) நேர்க்குறிஆகும். இது துகளின் நேர்க்குறிமுடுக்கத்தினைக் காட்டுகிறது. மேலும் 0 வினாடியிலிருந்து 10 வினாடிவரைதுகளின் திசைவேகம் அதிகரிப்பதைக் காணலாம்.

Aமுதல் Bவரை: (10 வினாடியிலிருந்து 15 வினாடிவரை)

10 வினாடி முதல் 15 வினாடிவரை 60 ms^{-1}என்ற மாறாத திசைவேகத்தில் துகள் உள்ளது. இது துகளின் சுழிமுடுக்கத்தினைக் காட்டுகிறது. மேலும் துகள் தொடர்ந்து நேர்க்குறிதிசையில் இயங்குவதை இது காட்டுகிறது.

Bமுதல் Cவரை (15 வினாடியிலிருந்து 30 வினாடிவரை)

15 வினாடியிலிருந்து 30 வினாடிவரைவளைகோட்டின் சாய்வுஎதிர்க்குறிஆகும். இது 15 வினாடியிலிருந்து 30 வினாடிவரைதுகளின் திசைவேகம் குறைவதைக் காட்டுகிறது. இருப்பினும் துகள் நேர்க்குற ிx அச்சுதிசையிலேயேதொடர்ந்து இயங்குகின்றது. 30 வினாடியில் துகளின் திசைவேகம் சுழியாகிறது. துகள் நேர்க்குறிxதிசையில் பெரும் தூரத்தைக் கடந்துபின்புகண நேர ஓய்வினை அடைகிறது.

C யிலிருந்து Dவரை (30 வினாடியிலிருந்து 40 வினாடிவரை)

30 வினாடியிலிருந்து 40 வினாடிவரைதுகள் எதிர்க்குறிதிசைவேகத்தினைஅடையும். இது துகள் எதிர்க்குறி ஒ அச்சுதிசையில் இயங்கத் தொடங்குவதைக் காட்டுகிறது. திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு 40ms^{-1} என்றபெருமதிப்பினைஅடைகிறது.

D யிலிருந்து Eவரை (40 வினாடியிலிருந்து 55 வினாடிவரை)

40 வினாடியிலிருந்து 55 வினாடிவரைதிசைவேகம் எதிர்க்குறியில் தான் இருக்கிறது. அது மட்டுமின்றி குறையத் தொடங்குகிறது. t =55 வினாடியில் துகளின் திசைவேகம் சுழியினைஅடைந்துதுகள் ஓய்வுநிலைக்கு வரும்.

ஆ) 0 முதல் 40 வினாடி வரை கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் கீழே உள்ள பரப்புதுகளின் இடப்பெயர்ச்சியைக் கொடுக்கும். இங்கு O முதல் Cவரை உள்ள பரப்புதுகள் நேர்க்குறி x திசையில் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சியையும், C முதல் Dஉள்ளபரப்புதுகள் எதிர்க்குறிxதிசையில் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சியையம் கொடுக்கும்.

0 வினாடிமுதல் 10 வினாடி வரை துகள் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சி $= \frac{1}{2}$ x10x60 = 300 m

10 வினாடிமுதல் 15 வினாடிவரைதுகள் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சி= 60x5 = 300 m

15 வினாடிமுதல் 30 வினாடிவரைதுகள் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சி= $\frac{1}{2}$ x15x60 = 450 m

30 வினாடிமுதல் 40 வினாடிவரைதுகள் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சி= $\frac{1}{2}$ x10x(-40) = 200 m

இங்கு எதிர்க்குறியானது, துகள் எதிர்க்குறி x அச்சுதிசையில் 200m சென்றதைக் காட்டுகிறது.
0 வினாடிமுதல் 40 வினாடி வரைதுகள் அடைந்த மொத்த இடப்பெயர்ச்சி

300 m+300 m+450 m-200 m = + 850 m

இங்கு நேர்க்குறியானது துகளின் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சி நேர்க்குறி அச்சின் திசையில் உள்ளது என்பதைக் காட்டுகிறது.

0 வினாடிமுதல் 40 வினாடி வரைதுகள் கடந்த மொத்த தூரம் (பாதையின் நீளம்)

=300 +300+450 +200= 1250 m

(இ) திசைவேகம் - நேரம் வரைபடத்தின் சாய்வுதுகளின் முடுக்கத்தைக் கொடுக்கும். முதல் 10 வினாடிகளுக்கு திசைவேகம் (மாறாதமுடுக்கம்)

எனவே, முடுக்கம் $= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ இங்கு

$v_2 = 60\ ms^{-1}$ மற்றும் $v_1 = 0$

$a = \frac{60-0}{10-0} = 60\ ms^{-2}$

மேலும் துகள் 15 வினாடியிலிருந்து 30 வினாடி வரை மாறாத எதிர்க்குறிசாய்வினைக் கொண்டுள்ளது. இந்நிகழ்வில் $v_2 = 0$ மற்றும் $v_2 = 60\ ms^{-1}$ எனவே t = 20 வினாடியில் முடுக்கமானது $a = \frac{0-60}{30-15} = 4\ ms^{-2}$ எதிர்க்குறிசாய்வானதுதுகளின் எதிர் முடுக்கத்தைக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.32

துகளின் நிலைவெக்டர் $\dot{r} = 3t^2\hat{i} + 5t\hat{j} + 4\hat{k}$ இதிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.

அ) t=3 வினாடியில் துகளின் திசைவேகம்

ஆ) t= 3 வினாடியில் துகளின் வேகம்

இ) t=3 வினாடியில் துகளின் முடுக்கம்

தீர்வு :

அ) திசைவேகம் $\dot{v} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

இங்கு $\bar{v}(t) = 6t\hat{i} + 5\hat{j}$

திசைவேகம் இரண்டு கூறுகளை மட்டுமே பற்றுள்ளது. அதாவது $v_x = 6t$ (நேரத்தைச் சார்ந்துள்ளது) மற்றும் $v_y = 5$ (நேரத்தைச் சாராதது)

t= 3 வினாடியில் திசைவேகம் $\bar{v}(3) = 18\hat{i} + 5\hat{j}$

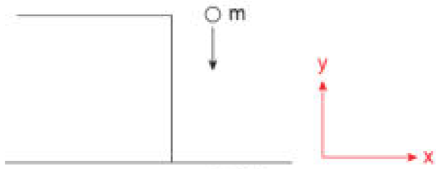
ஆ) t= 3 வினாடியில் துகளின் வேகம் $v=\sqrt{18^2+5^2}=\sqrt{349}\approx 18.68ms^{-1}$

இ) முடுக்கம் $=\bar{a}=\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}=6\hat{i}$

முடுக்கம் x- கூறினை மட்டுமே பெற்றுள்ளது. மேலும் இது நேரத்தைச் சாராதது. t = 3 வினாடியிலும் முடுக்கம் மாறாத மதிப்பான $\dot{a}=6\hat{i}$ ஐ பெற்றிருக்கும் என்பதை கவனிக்கவேண்டும். மேலும் இந்நிகழ்வில் துகள் சீரற்ற திசைவேகத்தையும் சீரானமுடுக்கத்தையும் பெற்றுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.33
பொருளொன்றை செங்குத்தாககீழ் நோக்கி எறியும் போது அது எவ்வகையான முடுக்கத்தினைப் பெறும்?

தீர்வு:
நாம் அறிந்தபடி, தடையின்றித் தானே புவியை நோக்கிவிழும் பொருள் புவிஈர்ப்பு விசையினால் ஒரு முடுக்கத்தைப்பெறும் அது புவிஈர்ப்பு முடுக்கமாகும். g= 9.8 ms^{-2}படத்தில் உள்ளபடி நாம் தகுந்த ஆய அச்சுத் தொகுப்பினை தேர்வு செய்யவேண்டும்.



இதிலிருந்துமுடுக்கமானதுஎதிர்க்குறிyதிசையில் செயல்படும் எனஅறியலாம்.

$\dot{a}$ = g (- $\hat{j}$)= -g $\hat{j}$

2.10.3. நுண்கணிதமுறையில் சீரானமுடுக்கமடைந்தபொருளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

நேர்கோட்டில் இயங்கும் பொருள் ஒன்றினைக் கருதுக. அதன் சீரான முடுக்கம் ‘a’என்க. இங்கு சீரான முடுக்கம் என்பதுமுடுக்கம் ஒரு மாறிலி: அது நேரத்தைச் சாராதது என்று பொருள்.

நேரம் t = 0 வினாடியில் பொருளின் திசைவேகம் u என்க. நேரம் t வினாடியில் பொருளின் திசைவேகம் vஎன்க.

திசைவேகம் - நேரம் தொடர்பு

(i)எந்த ஒரு நேரத்திலும் பொருளின் முடுக்கம் என்பதுநேரத்தைப் பொருத்துதிசைவேகத்தின் முதல் வகைக்கெழுவாகும்.

a= $\dfrac{dv}{dt}$ (அல்லது) dv = a dt

இயக்க நிபந்தனையின்படி (அதாவது நேரம் 0 விலிருந்து t வரைமாறும் போது, திசைவேகம் u விலிருந்து v க்குமாறும்) இரண்டுபக்கமும் தொகைப்படுத்துக.

$$\int_u^v dv=\int_0^t a\,dt=a\int_0^t dt\Rightarrow[v]_u^v=a[t]_0^t$$

v – u = at (or) v = u + at

இடப்பெயர்ச்சி– நேரம் தொடர்பு

(ii) பொருளின் திசைவேகம் என்பது நேரத்தைப் பொருத்து பொருளின் இடப்பெயர்ச்சியின் முதல் வகைக் கெழுவாகும்.

v= $\dfrac{ds}{dt}$ (அல்லது) ds = v dt

இங்குv= u = at,

எனவே,ds= (u+ at) dt.

நேரம் t=0 வினாடியில் பொருள் தொடக்கப்புள்ளியில் உள்ளதுஎனவும் 't'கால இடைவெளியில் பொருளின் இடப்பெயர்ச்சி's'எனவும் கருதுக. மேலும் பொருளின் முடுக்கம் நேரத்தைச் சார்ந்ததல்லஎனக் கருதுக.

$$\int_0^s ds = \int_0^t u dt + \int_0^t at\, dt \quad \text{(அல்லது)} \quad s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

திசைவேகம் - இடப்பெயர்ச்சிதொடர்பு

பொருளின் முடுக்கமென்பது, நேரத்தைப் பொருத்து திசைவேகத்தின் முதல் வகைக்கெழுவாகும்.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

[ds/dt= v] இங்குsஎன்பதுகடந்ததொலைவுஆகும்.

$$a = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} \text{ அல்லது } ds = \frac{1}{2a}d(v^2)$$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டை தொகைப்படுத்த அதாவது திசைவேகம் u விலிருந்து vக்கு மாறும் போதுதுகள் 0 விலிருந்து s வரை இடப்பெயர்ச்சிஅடையும்.

$$\int_0^s ds = \int_u^v \frac{1}{2a}d(v^2)$$

$$\therefore\ s = \frac{1}{2a}(v^2 - u^2)$$

$$\therefore\ v^2 = u^2 + 2as$$

ஆரம்ப திசைவேகம் 'u'மற்றும் இறுதித் திசைவேகம் 'v' இவற்றைப் பொருத்தும் துகளின் இடப்பெயர்ச்சியை வருவிக்கலாம். சமன்பாடு (2.7) லிருந்து

at = v-u

இதனைச் சமன்பாடு (2.8) ல் பிரதியிடும்பொது

$$s = ut + \frac{1}{2}(v-u)t$$

$$s = \frac{(u+v)t}{2}$$

எனக் கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (2.7) (2.8) (2.9) மற்றும் (2.10) ஆகியவை இயக்கச் சமன்பாடுகள் எனப்படும். இவை நடைமுறையில் பல்வேறு இடங்களில் நமக்குப் பயன்படுகின்றன.

இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$v = u + at$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$s = \frac{(u+v)t}{2}$$

இயக்கச் சமன்பாடுகள் அனைத்தும், நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் சீரானமுடுக்கம் பெற்ற பொருட்களுக்கு மட்டுமே பொருந்தும் இவை வட்ட இயக்கம் மற்றும் அலைவியக்கத்தில் உள்ள பொருட்களுக்குப் பொருந்தாது.

புவிஈர்ப்பினால் இயங்கும் பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்:

நடைமுறையில் புவிப்பரப்பிற்கு சற்றே மேலே இயங்கும் பொருளின் இயக்கத்தினை சீரான முடுக்கம் பெற்ற நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் பொருளின் இயக்கமாகக் கருதலாம். நூம் அறிந்த படி

புவிப்பரப்பிற்கு அருகில் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் 'g' ஒருமாறிலிஆகும். இந்த புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தினால் நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் பொருளின் இயக்கத்தினை, இயக்கச் சமன்பாடுகளின் துணையுடன் நன்கு புரிந்து கொள்ள இயலும்.

நிகழ்வு (1) h உயரத்திலிருந்து தானே விழும் பொருள்:

'm' நிறையுடைய பொருளொன்று 'h' உயரத்திலிருந்து விழுகின்றது எனக் கருதுக. இங்கு காற்றுத்தடையை புறக்கணிக்கவும். (neglect) படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு கீழ்நோக்கிய திசையை நேர்க்குறி y அச்சாகக் கருதுக. பொருள் புவிப்பரப்பிற்கு அருகே விழுவதால் அது சீரான புவிஈர்ப்பு முடுக்கத்தைப் பெறும். நாம் இயக்கச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு இவ்வியக்கத்தினை விளக்கலாம்.

முடுக்கம் $\dot{a} = g\,\hat{j}$

கூறுகளை ஒப்பிடும் போது

$$a_x = 0,\ a_z = 0,\ a_y = g$$

ஏளிமையாக $a_y = a = g$ எனக் கொள்க.

'u' ஆரம்ப திசைவேகத்துடன் நேர்க்குறி y அச்சுதிசையில் பொருளை கீழ்நோக்கி எறிவதாகக் கருதுக.

t என்ற ந்தவொருநேரத்திலும் பொருளின் இறுதித்திசைவேகம்

$$v = u + gt \qquad (2.11)s$$

t என்றஎந்தவொருநேரத்திலும் பொருளின் நிலை

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

பொருள் y புள்ளியில் உள்ளபோதுபொருளின் இருமடிவேகம்

$$v^2 = u^2 + 2gy \qquad (2.13)$$

(y என்பது மலையின் உச்சியிலிருந்து உள்ள தொலைவு)

பொருள் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விழத்து வங்கினால் u = 0, எனவே எந்தவொரு நேரத்திலும் பொருளின் திசைவேகம்.

$$v = gt \qquad (2.14)$$

எந்தவொரு நேரத்திலும் பொருளின் நிலை

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2.15)$$

பொருள் y புள்ளியில் உள்ளபோதுஅதன் இருமடிவேகம்

$$v^2 = 2gy \qquad (2.16)$$

பொருள் தரையை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் (t= T) எனில்
(2.15) லிருந்து

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \qquad (2.17)$$

இங்கு y = h என்க.

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2.18)$$

சமன்பாடு (2.18)லிருந்துh ன் மதிப்புஅதிகரிக்கும்போதுபொருள் தரையைஅடையஅதிகநேரம் எடுத்துக்கொள்ளும் என்பதைஅறியலாம். மேலும் h ன் மதிப்புகுறைவுஎனில் பொருள் தரையைஅடையகுறைந்தநேரமாகும் என்பதைஅறியலாம்.

சமன்பாடு (2.16) லிருந்துதரையைஅடையும் போது (y=h) பொருளின் வேகத்தினைக் கணக்கிடலாம்.

$$v_{ground} = \sqrt{2gh}$$

சமன்பாடு (2.19) லிருந்துh ன் மதிப்புஅதிகரிக்கும் போது பொருள் மிக அதிக வேகத்துடன் தரையையஅடையும். மேலும் h ன் மதிப்புகுறையும் போதுபொருள் குறைவான வேகத்துடன் தரையையஅடையும் என்பதைஅறியலாம்.

குறைந்த செங்குத்து உயரத்திலிருந்து ($h \ll R$) புவியீர்ப்பு விசையினால் மட்டுமே புவியினை நோக்கிவிழும் பொருளின் இயக்கத்தினை, தடையின்றித் தானே விழும் பொருளின் இயக்கம் என அழைக்கலாம். (இங்குR என்பது புவியின் ஆரமாகும்.)

எடுத்துக்காட்டு 2.34

10 m உயரத்திலிருந்து இரும்புப் பந்து மற்றும் இறகு இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் விழுகின்றன. இரும்புப் பந்து மற்றும் இறகு இரண்டும் தரையை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு?

அ) இரும்புப் பந்து மற்றும் இறகு இரண்டும் தரையை அடையும்போது அவற்றின் திசைவேகங்கள் எவ்வளவு? (காற்றுத் தடையைப் புறக்கணிக்கவும் மேலும் $g=10\ ms^{-2}$என்க)

தீர்வு:

இயக்கச் சமன்பாடுகள் நிறையைச் சார்ந்ததல்ல. சமன்பாடு (2.18) லிருந்து, இரும்புப் பந்துமற்றும் இறகு இரண்டும் ஒரேநேரத்தில் தரையை அடையும். இதனைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.

$$T=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times10\times10} = \sqrt{\frac{2\times10}{10}}=\sqrt{2s}\approx1.414s$$
$$\sqrt{200}$$

எனவே இரும்புப் பந்துமற்றும் இறகு இரண்டும் ஒரேநேரத்தில் தரையைஅடையும் சமன்பாடு (2.19) லிருந்து இரும்புப் பந்துமற்றும் இறகுதரையைஅடையும்போதுஅவற்றின் திசைவேகங்கள் சமம். இதனைப் பின்வருமாறுஅறியலாம்.

$$v = \sqrt{2gh}=\sqrt{2\times10\times10}$$
$$\sqrt{200}\ ms^{-1}\approx14.14ms^{-1}$$

வெற்றிடத்தில் அனைத்துப் பொருட்களும் ‘g’என்றசமமுடுக்கத்துடன் கீழேவிழும் என்பதைக் கலிலியோகண்டறிந்தார்.

எடுத்துக்காட்டு2.35

இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திகிணற்றின் ஆழத்தைஅளக்கமுடியுமா?

தண்ணீர் இல்லாத கிணறு ஒன்றைக் கருதுக. அதன் ஆழம் dஎன்க. ஒரு சிறிய எலுமிச்சம்பழம் மற்றும் நிறுத்து கடிகாரத்தை எடுத்துக்கொள்க. எலுமிச்சம்பழத்தை கிணற்றின் விளிம்பிலிருந்து போடும் போது கடிகாரத்தை இயக்கவும். அது கிணற்றின் தரையை அடையும்போது கடிகாரத்தை நிறுத்தி தரையை அடைய எடுத்துக்கொண்ட நேரத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதனைt என்க.

எலுமிச்சம்பழத்தின் ஆரம்பதிசைவேகம் $u = 0$மேலும் கிணறு முழுவதும் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் ‘g’மாறிலி. எனவேசீரானமுடுக்கம் பெற்றபொருளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளை இங்கு பயன்படுத்தலாம்.

$$s= ut + \frac{1}{2}\ at^2$$

$u=0, s=d, a=g$ (கீழ் நோக்கிய இடப்பெயர்ச்சியை நேர்க்குறி y அச்சு திசையில் கருதுக)

$$d= \frac{1}{2}\ gt^2$$

$g= 9.8\ ms^{-2}$ எனப் பிரதியிட்டுகிணற்றின் ஆழத்தினைக் கணக்கிடலாம்.

கணக்கீட்டில் ஏற்பட்ட பிழையினைக் கண்டறிய நமக்குக் கிணற்றின் சரியான ஆழம் தெரிய வேண்டும். இதனை ஒரு கயிற்றினைப் பயன்படுத்தி அறியலாம். ஒரு கயிற்றினை எடுத்து அதைக் கிணற்றின் தரையைத் தொடும் அளவுக்கு தொங்கவிட வேண்டும். இப்போது கயிற்றின் நீளம் $d_{correct}$ குறிக்கப்படுகிறது.

பிழை= $d_{correct} - d$

சார்புப்பிழை= $\dfrac{d_{correct} - d}{d_{correct}}$

சார்புப்பிழைசதவீதம் $= \dfrac{d_{correct} - d}{d_{correct}} \times 100$

பிழைக்கானகாரணம் என்ன?

சோதனையைவெவ்வேறுநிறைகளுக்கு மீண்டும் நிகழ்த்திஅதன் முடிவினை$d_{correct}$உடன் ஒவ்வொருமுறையும் ஒப்பிடவும்.

நேர்வு (ii)பொருளொன்றைசெங்குத்தாகமேல்நோக்கிஎறிதல்:

'm' நிறையுடைய பொருளொன்றை 'u'என்ற ஆரம்ப திசை வேகத்துடன் செங்குத்தாக மேல் நோக்கி எறிக. காற்றுத் தடையைப் புறக்கணிக்கவும். மேல் நோக்கிய செங்குத்து திசைy அச்சின் திசை எனக் கருதுக.

இந்நிகழ்வில் முடுக்கம் a= - g, ஏனெனில் 'g' எதிர்க்குறி'y'அச்சின் திசையில் செயல்படுகிறது. இவ்வகையான இயக்கத்திற்கான இயக்கச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு.

எந்தவொருநேரத்திலும் பொருளின் திசைவேகம்

$$v=u-gt \quad (2.20)$$

எந்தவொருநேரத்திலும் பொருளின் நிலை

$$s= ut + \frac{1}{2} gt^2 \quad (2.21)$$

எந்தவொருநிலையிலும் yபொருளின் திசைவேகம்

$$v^2 =u^2-2gy \quad (2.22)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36

இரயில் வண்டியொன்று 54 $km\ h^{-1}$ என்ற சராசரி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. தடையை செலுத்திய பின்பு அவ்வண்டி 225mசென்று நிற்கிறது எனில் இரயில் வண்டியின் எதிர் முடுக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

இரயில் வண்டியின் இறுதித் திசைவேகம் v=0 இரயில் வண்டியின் ஆரம்பத்திசைவேகம்

$$u = 54 \times \frac{5}{18} ms^{-1} = 15\ ms^{-1}$$

$$s = 225\ m$$

எதிர் முடுக்கம் எப்போதும் திசைவேகத்திற்குஎதிராக இருக்கும் எனவே,

$$v^2 = u^2 - 2as$$

$$0 = (15)^2 - 2a\,(225)$$

$$450\,a = 225$$

$$a = \frac{1}{2} ms^{-2}$$

எனவே, எதிர்முடுக்கம் $= 0.5\ ms^{-2}$

2.11 எறிபொருளின் இயக்கம் (PROJECTILE MOTION)

2.11.1 அறிமுகம்

தொடக்கத் திசைவேகம் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டபின்புவிஈர்ப்புவிசையினால் மட்டும் காற்றில் இயங்கும் பொருள் எறிபொருள் எனப்படும். எறிபொருள் மேற்கொள்ளும் பாதைஎறிபாதை(trajectory) எனப்படும்.

எறிபொருளுக்குஎடுத்துக்காட்டுகள்

1. ஓடும் இரயிலின் ஜன்னலிலிருந்து கீழே போடப்படும் பொருள்
2. துப்பாக்கியிலிருந்து வெளியேறும் குண்டு.
3. ஏதேனும் ஒருதிசையில் வீசி எறியப்படும் பந்து.
4. தடகளவீரர் எறியும் ஈட்டி அல்லது குண்டு.
5. தண்ணீர் தொட்டியின் அடிப்பக்கத்தில் உள்ளகுழாய் வழியாக பீச்சி அடிக்கும் தண்ணீர்.

எறிபொருளின் இயக்கமானது இரண்டு திசைவேகங்களின் கூட்டுவிளைவு எனக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது.

காற்றுத்தடை இல்லாதநிலையில் கிடைத்தளத் திசையில் உள்ளமாறாத் திசைவேகம்.

புவிஈர்ப்பு விசையினால் சீராக மாறும் (அதாவது அதிகரிப்பு அல்லது குறைவு) செங்குத்துத் திசைவேகம்.

எறிபொருளின் இயக்கம் இரண்டுவகைப்படும்.

- கிடைத்தளத்தில் எறியப்படும் எறிபொருளின் இயக்கம்.
- கிடைத்தளத்துடன் குறிப்பிட்டகோணத்தில் எறியப்படும் எறிபொருளின் இயக்கம்.

- எறிபொருள் இயக்கத்தினை அறிந்து கொள்ள கீழ்க்கண்ட கருத்துக்களை நினைவில் நிறுத்த வேண்டும்.
- காற்றுத்தடையை புறக்கணிக்க வேண்டும்.
- புவியின் சுழற்சி விளைவு மற்றும் புவியின் வளைவு ஆரப் பண்புகளைப் புறக்கணிக்க வேண்டும்.
- எறிபொருளின் இயக்கம் முழுவதிலும் புவிஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு மற்றும் திசைமாறாது.

2.11.2. கிடைத்தளத்தில் எறியப்படும் எறிபொருளின் இயக்கம்

எறிபொருள் ஒன்றைக் கருதுக. அதாவது h உயரமுள்ள கட்டிடம் ஒன்றின் உச்சியிலிருந்து u என்ற தொடக்கத் திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்தில் எறியப்படும் பந்து ஒன்றினைக் கருதுக.

பந்து இயங்கும் போது u என்றமாறாதகிடைத்தள திசைவேகத்தினால் கடக்கும் கிடைத்தளத் தொலைவையும் சீரான புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தினால் கடக்கும் கீழ்நோக்கிய செங்குத்துத் தொலைவையும்

பெற்றிருக்கும். எனவே, இவ்விரண்டு விளைவுகளினால் பந்து OPA என்ற பாதையில் இயங்கும். இவ்வியக்கம் இருபரிமாணத் தளத்தில் உள்ளது. பந்துதரையில் உள்ள A புள்ளியை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் tஎன்க.

பந்துகடந்த கிடைத்தளத் தொலைவு,$x(t) = x$

பந்துகடந்த செங்குத்துத் தொலைவு,$y(t) = y$

நாம் இயக்கச் சமன்பாடுகளை தனித்தனியே x அச்சுத் திசையிலும் மற்றும் y அச்சுத் திசையிலும் பயன்படுத்தவேண்டும். இங்குஎறிபொருளின் இயக்கம் இரு பரிமாணமுடையது. எனவே திசைவேகம், கிடைத்தளக் கூறுu_xமற்றும் செங்குத்துக் கூறு u_yஆகிய இரு கூறுகளையும் பெற்றிருக்கும்.

கிடைத்தளத்திசையில் எறிபொருளின் இயக்கம்

பந்து'x'அச்சுத் திசையில் எவ்வித முடுக்கத்தினையும் பெற்றிருக்கவில்லை. எனவே இயக்கம் முழுவதும் தொடக்கத் திசைவேகம் மாறாதமதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

't' நேரத்தில் எறிபொருள் கடந்தகிடைத்தளத் தொலைவுx= $u_x\, t + \frac{1}{2}\, at^2$

இங்கு x ன் திசையில் a = Oஎனவேx= $u_x\, t$ (2.23)

கீழ்நோக்கியத் திசையில் எறிபொருளின் இயக்கம்.

இங்குu_y =0 (ஆரம்பத் திசைவேகத்திற்கு கீழ் நோக்கியக் கூறு இல்லை) a=g (கீழ் நோக்கிய இயக்கத்தை நேர்க்குறி y அச்சுவழியே குறிப்பிடவும்.),மேலும் s=y

$\therefore$ சமன்பாட்டிலிருந்து $y= u_y\, t + \frac{1}{2}\, at^2$

$$y= \frac{1}{2}\, gt^2 \qquad (2.24)$$

சமன்பாடு (2.23)லிருந்து't' இன் மதிப்பைசமன்பாடு (2.24) இல் பிரதியிட்டால்

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u_x^{\ 2}} = \left(\frac{g}{2u_x^{\ 2}} \right) x^2$$

$$y= Kt^2 \qquad (2.24)$$

இங்கு $K = \frac{g}{2u_x^2}$ ஒருமாறிலி

சமன்பாடு (2.25) ஒருபரவளையச் சமன்பாடுஎனவேஎறிபொருளின் பாதைஒருபரவளையம் ஆகும்.

(1) **பறக்கும் நேரம்**: எறிபொருள் தன்னுடையபாதையைநிறைவுசெய்யஎடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் அல்லதுஎறிபொருள் எறியப்பட்டகணத்திலிருந்து,தரையைஅடையஎடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் பறக்கும் நேரம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,கட்டிடத்தின் உயரம் hஎன்க. எறிபொருள் எறியப்பட்டகணத்திலிருந்துஅதன் பாதைவழியேதரையைஅடையஎடுத்துக்கொண்டநேரத்தைTஎன்க.

நாம் அறிந்தபடிசெங்குத்து இயக்கத்திற்கு

$$s_y= u_y\, t + \frac{1}{2}\, at^2$$

இங்கு

$s_y= h,\ t= T,\ u_y= 0$ (ஆரம்ப செங்குத்துத் திசைவேகம் சுழி)

a= g (எறிபொருள் புவிஈர்ப்பு விசையின் காரணமாக கீழே விழுகிறது)

$$h = \frac{1}{2}\, gT^2 \text{ அல்லது} T= \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

எனவே, பறக்கும் நேரம் கட்டிடத்தின் உயரத்தைச் சார்ந்துள்ளது. ஆனால் அது கிடைத்தளத் திசை வேகத்தைச் சார்ந்ததல்ல. ஒரு பந்து செங்குத்தாக மேலிருந்து கீழ் நோக்கி விழுகிறது. அதே நேரத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைவேகத்தில் பந்து ஒன்று கிடைத்தளத்தில் வீசி எறியப்படுகிறது. இவ்விரண்டு பந்துகளும் ஒரேநேரத்தில் தரையைஅடையும்.

2) கிடைத்தளநெடுக்கம்: எறியப்பட்ட புள்ளிக்குநேர் கீழே கட்டிடத்தின் தரையிலிருந்து எறிபொருள் தரையை அடைந்த புள்ளி வரை உள்ள தொலைவு, கிடைத்தள நெடுக்கம் எனப்படும்.

நாம் அறிந்த படிகிடைத்தள இயக்கத்தில்

$$s_x= u_x\, t + \frac{1}{2}\, at^2$$

இங்கு s_x= R (கிடைத்தள நெடுக்கம்) u_x= u, a= 0 (கிடைத்தளத்திசையில் முடுக்கம் இல்லை), பறக்கும் நேரம் 'T'எனவே கிடைத்தள நெடுக்கம் = uT.

நாம் அறிந்தபடி பறக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{2h}{g}}$

எனவே கிடைத்தள நெடுக்கம் R= $u\sqrt{\frac{2h}{g}}$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைத்தள நெடுக்கம் ஆரம்பத் திசைவேகத்திற்கு (u) நேர்த்தகவிலும், புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் (g) இருமடி மூலத்திற்கு எதிர்த்தகவிலும் உள்ளதைக் காட்டுகிறது.

3) தொகுபயன் திசைவேகம் (ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் எறிபொருளின் திசைவேகம்) ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் t யிலும் எறிபொருளுக்கு x– அச்சு மற்றும் y- அச்சு ஆகிய இரண்டு அச்சுகளிலும் திசைவேகக் கூறுகள் உள்ளன. இவ்விரண்டு கூறுகளின் தொகுபயன், எறிபொருளின் தொகுபயன் திசைவேகத்தைக் கொடுக்கும்.

கிடைத்தளத் திசையில் (x-அச்சில்) திசைவேகக்கூறு

$v_x = u_x + a_x t$ இங்கு $u_x = u$, $a_x = 0$

எனவே $v_x = u \quad \rightarrow (2.26)$

செங்குத்துத்திசையில் (y-அச்சில்) திசைவேகக்கூறு

$v_y = u_y + a_y t$ இங்கு $u_y = 0$, $a_y = g$

எனவே $v_y = gt \quad \rightarrow (2.27)$

எந்தவொருகுறிப்பிட்டநேரத்திலும் எறிபொருளின் திசைவேகம்

$\bar{v} = u\hat{i} + gt\,\hat{j}$

எந்தவொருகுறிப்பிட்டநேரத்திலும் எறிபொருளின் வேகம்

v= $\sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$

எறிபொருள் தரையைத் தொடும்போதுஅதன் வேகம்

v= $\sqrt{u^2 + g^2 t^2}$

எறிபொருள் எறியப்பட்டகணத்திலிருந்துதரையைஅடையஎடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்

= T $\sqrt{\frac{2h}{g}}$

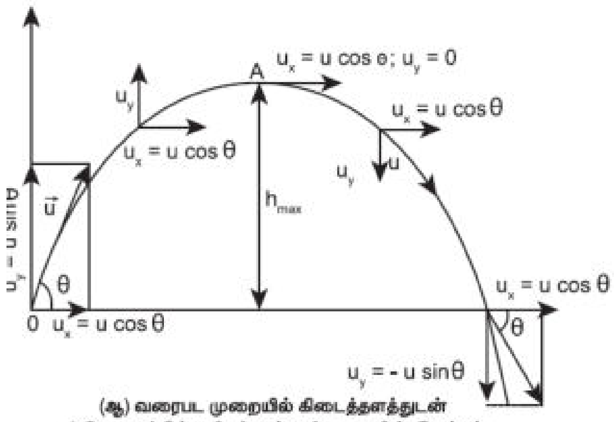
எறிபொருளின் கிடைத்தளத்திசைவேகக்கூறு மாறாததுஅதாவது $v_x = u$

Tநேரத்தில் எறிபொருளின் செங்குத்துத் திசைவேகக்கூறு $v_y = gT = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$

எனவேஎறிபொருள் தரையைத் தொடும் போதுஅதன் வேகம் v= $\sqrt{u^2 + 2gh}$

2.11.3 கிடைத்தளத்துடன் குறிப்பிட்டகோணத்தில் எறியப்படும் எறிபொருளின் இயக்கம்

எறிபொருள் ஒன்று,கிடைத்தளத்துடன் குறிப்பிட்டகோணத்தில் எறியப்படுகிறது. (சாய்நிலையில் எறியப்பட்டஎறிபொருள்)



(ஆ) வரைபட முறையில் கிடைத்தளத்துடன்
θ கோணத்தில் எறியப்படும் எறிபொருளின் இயக்கம்

எடுத்துக்காட்டுகள்

- சாய்நிலையில் பிடிக்கப்பட்டதண்ணீர் குழாயிலிருந்துவெளியேறும் நீர்
- பீரங்கியிலிருந்துசுடப்பட்டகுண்டு.

கிடைத்தளத்துடன் θகோணத்தில் எறியப்படும் எறிபொருளின் ஆரம்பதிசைவேகம் $\vec{u}$ என்க. இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறுஎழுதலாம்.

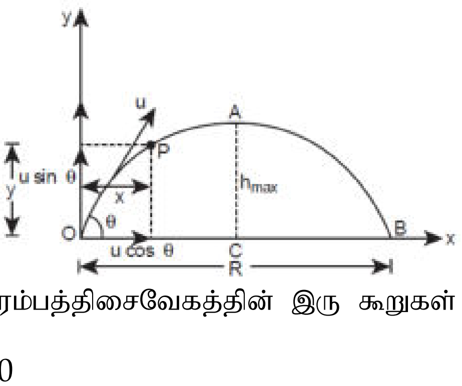
$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$$

ஆரம்பதிசைவேகத்தின் கிடைத்தளக்கூறு $u_x = u \cos\theta$மற்றும் அதன் செங்குத்துக்கூறு $u_y = u \sin\theta$ இங்குபுவியீர்ப்புவிசைசெங்குத்துக்கூறுக்குu_yஎதிர்த்திசையில் செயல்படுகிறது. இது செங்குத்துக் கூறினைபடிப்படியாகக் குறைத்துஎறிபொருளின் பெரும் உயரத்தில் அதனைசுழியாக்கும். $u_y=0$ இதே புவியீர்ப்புவிசைஎறிபொருளைகீழ்நோக்கி இயங்கவைத்துதரையைஅடையச் செய்யும். எறிபொருளின் இயக்கம் முழுமைக்கும் x–அச்சுத்திசையில் எவ்விதமானமுடுக்கமும் இல்லை. எனவேதிசைவேகத்தின் கிடைத்தளக் கூறு ($u_x = u \cos\theta$) எறிபொருள் தரையைஅடையும் வரைமாறாது.

tகாலத்திற்குபின்புகிடைத்தளத்திசைவேகம்,$v_x = u_x + a_x t$

இங்கு$a_x = 0$எனவே$v_x = u_x = u \cos\theta$

tநேரத்தில் எறிபொருள் கிடைத்தளத்தில் கடந்ததொலைவு$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$



ஆரம்பத்திசைவேகத்தின் இரு கூறுகள்

இங்கு$s_x = x$, $u_x = u \cos\theta$, $a_x = 0$

எனவே,$x = u \cos\theta$, t அல்லது $t = \frac{x}{u \cos\theta}$ (2.28)

t நேரத்திற்குபின்புசெங்குத்துத்திசைவேகம் $v_y = u_y + a_y t$

இங்கு$u_y = u \sin\theta$, $a_y = -g$(புவியீர்ப்புமுடுக்கம் இயக்கத்திற்குஎதிர்த்திசையில் செயல்படுகிறது.

எனவே$v_y = u \sin\theta - gt$ (2.29)

எறிபொருள் அதேtநேரத்தில் அடைந்தசெங்குத்துத் தொலைவு$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

இங்கு$s_y = y$, $u_y = u \sin\theta$, $a_y = -g$ எனவே

$$y = u \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2.30)$$

சமன்பாடு (2.28) லிருந்துt இன் மதிப்பைசமன்பாடு (2.30) இல் பிரதியிடும் போது

$$y = u \sin \theta \frac{x}{u \cos \theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \theta}$$

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \theta}$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை உற்று நோக்கும் போது எறிபொருள் மேற்கொண்ட பாதை ஒரு தலைகீழான பரவளையம் எனஅறியலாம்.

பெருமஉயரம் (h_{max})

எறிபொருள் தன்னுடையபயணத்தில் அடையும் அதிகபட்சசெங்குத்துஉயரம்,பெருமஉயரம் (h_{max})எனப்படும். அதனைக் கீழ்க்கண்டவாறுகணக்கிடலாம்.

$$v_y^2 = u_y^2 + 2a_y s$$

இங்குv_y= u sin θ, a_y= - g, s= h_{max}மேலும் பெருமஉயரத்தில் v_y=0
எனவே

$$(0)^2 = u^2$$

$$(0)^2 = u^2 \sin^2 \theta - 2 g h_{max}$$

(அல்லது) $h_{max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$

பறக்கும் நேரம் (T_f)

எறியப்பட்டபுள்ளியிலிருந்து,எறியப்பட்டபுள்ளிஉள்ளகிடைத்தளத் தரையைஅடையஎறிபொருள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,பறக்கும் நேரம் எனப்படும். இங்குபறக்கும் நேரம் என்பதுஎறிபொருள் Oபுள்ளியிலிருந்துAபுள்ளிவழியாகBபுள்ளியைஅடையஎடுத்துக்கொள்ளும் நேரமாகும்.

நாம் அறிந்தபடி$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

இங்குs_y=y = 0 (y -அச்சுதிசையில் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சிசுழி) u_y= u sin θ, a_y =-g, t= T_f

$$0 = u \sin \theta \, T_f - \frac{1}{2} g T_f^2$$

$$T_f = 2u \frac{\sin \theta}{g}$$

கிடைத்தளநெடுக்கம் (R)

எறியப்பட்ட புள்ளிக்கும், எறியப்பட்ட புள்ளி உள்ள கிடைத்தளத்தில் எறிபொருள் விழுந்த இடத்திற்கும் இடையே உள்ள தொலைவு எறிபொருளின் கிடைத்தள நெடுக்கம் எனப்படும். ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் கிடைத்தளக் கூறில் எவ்வித மாற்றமும் இல்லை எனவே,
கிடைத்தள நெடுக்கம் R = திசைவேகத்தின் கிடைத்தளக் கூறு x பறக்கும் நேரம்.

$$R = u \cos \theta \times \frac{2u \sin \theta}{g} = \frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$\therefore R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

கிடைத்தள நெடுக்கமானது ஆரம்பத்திசைவேகம் (u) எறிகோணத்தின் இரு மடங்கின் சைன் மதிப்பு (sin 2θ) இவற்றிற்கு நேர்த்தகவிலும் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்திற்கு (g) எதிர்த்தகவிலும் இருக்கும்.

பெரும கிடைத்தள நெடுக்கத்திற்கு sin 2θ பெருமமாக இருக்க வேண்டும். sin 2θ = 1 இதிலிருந்து 2θ= π/2எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $\theta = \frac{\pi}{4}$

எனவே கிடைத்தளத்துடன் 45°கோணத்தில் எறிபொருளினை எறிந்தால் அது பெரும கிடைத்தள நெடுக்கத்தை அடையும் என்பதைஅறியலாம்.

$h_{max} = \frac{u^2}{g}$

தமிழகத்தில் ஆர்வமூட்டும் ஒருபாரம்பரியமானவிளையாட்டுஉள்ளது. அதற்கு ‘கிட்டிபுள்’என்றுபெயர். கிட்டியினால் புள்ளைஅடிக்கும் போதுபுள் பரவளையபாதையில் (parabolic path)செல்லும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.37

எறிபொருள் ஒன்று $10ms^{-1}$என்றஆரம்பத்திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் $\frac{\pi}{4}$ கோணஅளவில் எறியப்படுகிறது. அதன் கிடைத்தளநெடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி. அதேஎறிபொருளைமுன்னர் எறிந்தவாறேநிலவில் எறியும் போதுஅதன் கிடைத்தளநெடுக்கத்தில் ஏதேனும் மாற்றம் நிகழுமா? நிகழும் எனில் எவ்வகையானமாற்றம் என்றுவிளக்குக.

(நிலவின் ஈர்ப்புமுடுக்கம் $g_{\text{நிலவு}} = \frac{1}{6}\,g$)

தீர்வு

எறிபொருள் இயக்கத்தில் கிடைத்தளநெடுக்கம்

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\theta = \pi/4$$

$$u = v_0 = 10ms^{-1}$$

$$R_{\text{புவி}} = R = \frac{(10)^2 \sin \pi/2}{9.8} = 100/9.8$$

$R_{\text{புவி}} = 10.20$ m (தோராயமாக 10m)

இதே எறிபொருளைநிலவில் எறியும் போதுஅதன் கிடைத்தளநெடுக்கம் அதிகரிக்கும். ஏனெனில் நிலவின் ஈர்ப்புமுடுக்கம் புவியின் ஈர்ப்புமுடுக்கத்தைவிடக் குறைவு.

$$g_{\text{நிலவு}} = \frac{g}{6}$$

$$R_{\text{நிலவு}} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g_{\text{நிலவு}}}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g/6}$$

$$R_{\text{நிலவு}} = 6R_{\text{புவி}}$$

$$R_{\text{நிலவு}} = 6 \times 10.20 = 61.20$$

(தோராயமாக 60 m)

நிலவில் எறி பொருளின் கிடைத்தள நெடுக்கம், புவியில் எறிபொருளின் கிடைத்தள நெடுக்கத்தை விட ஆறு மடங்கு அதிகம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.38

படத்தில் காட்டியவாறு கிரிக்கெட் வீரர் பந்து ஒன்றினை மட்டையால் அடித்த பின்பு,அப்பந்து $30 ms^{-1}$என்ற திசை வேகத்துடனும், $30°$ கோணத்திலும் பறந்து செல்கிறது. மைதானத்தின் எல்லையானது பந்தினை அடித்த கிரிக்கெட் வீரரிலிருந்து 75 m தொலைவில் உள்ளது. அப்பந்து மைதானத்தின் எல்லையை பறந்து சென்று கிரிக்கெட் வீரருக்கு ஆறு ரன்களைப் பெற்றுத்தருமா? (காற்றுத்தடையைப் புறக்கணிக்கவும் மற்றும் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் $g = 10\ ms^{-2}$ எனக் கருதுக.)

தீர்வு

கிரிக்கெட் பந்தின் இயக்கத்தை எறிபொருளின் இயக்கமாகக் கருதலாம். நாம் முன்னர் பார்த்தபடி கிடைத்தளத் தொலைவு.

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

ஆரம்பத் திசைவேகம் $u = 30\ ms^{-1}$

எறிகோணம் $\theta = 30°$

கிரிக்கெட் பந்தின் கிடைத்தளநெடுக்கம்

$$R = \frac{(30)^2 \times \sin 60°}{10} = \frac{900 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = 77.94 m$$

கிடைத்தளநெடுக்கம் மைதானத்தின் எல்லையான 75 மீட்டரைவிடஅதிகமாகஉள்ளது. எனவே,பந்துஎல்லையைக் கடந்துபறந்துவீரருக்கு ஆறு ரன்களைப் பெற்றுத்தரும்.

2.11.4டிகிரிமற்றும் ரேடியன்கள் அறிமுகம்.

கோணங்களைஅளவீடுசெய்வதற்குபல்வேறுஅலகுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவற்றுள் பொதுவாகஅனைவராலும் பயன்படுத்தப்படும் அலகுடிகிரிமற்றும் ரேடியன் ஆகும். பரப்பு,பருமன்,சுற்றளவுபோன்றவற்றைஅளப்பதற்குரேடியன் பயன்படுகிறது.

ரேடியன்: வட்டவில் வட்டமையத்தில் ஒருதளக் கோணத்தைஉருவாக்குகிறது. வட்டவில்லின் நீளத்தை,வட்டத்தின் ஆரத்தால் வகுக்கக் கிடைக்கும் மதிப்பேரேடியன் ஆகும். வட்டத்தின் ஆரத்திற்குசமமானநீளமுள்ளவட்டவில்,வட்டமையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணம் ஒருரேடியன் ஆகும்.

கோணத்தின் அளிவினைஅளப்பதற்குப் பயன்படும் ஒருஅலகுடிகிரிஎனப்படும். இது கோணத் திசையினைக் காட்டுகிறது. ஒருகோணம்,வட்டத்தைஒரு முழு சுற்றுசுற்றும்போதுஅதன் மொத்தக் கோணம் $360°$. எனவேஒரு முழு வட்டம்$360°$யைப் பெற்றுள்ளது. ஒருமுழுவட்டம் என்பது 2πரேடியனைகுறிக்கிறது.

எனவே $360° = 2\pi rad$

அல்லது $1\ rad = \frac{180}{\pi}$ degree

$$1\ rad \cong 57.27°$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

படத்தில் உள்ளவட்டச்சக்கரத்தின் அருகருகேஉள்ள இரண்டுஆரச்சட்டங்களுக்கு (SPOKES)இடையேஉள்ளகோணம் θவைக் காண்க. உங்களின் விடையைரேடியன் மற்றும் டிகிரி இரண்டிலும் குறிப்பிடவும்.

தீர்வு:

முழுச்சரம் மையத்தில் 2πரேடியன்களைஏற்படுத்தும் சக்கரம் 12 பிரிவுகளாகப் (வட்டவில்) பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.
எனவே,ஒருபிரிவுஏற்படுத்தும் கோணம்

$$\theta = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

நாம் அறிந்தபடி= π rad = 180°, $\frac{\pi}{6}$rad = 30°∴ எனவே, 2 ஆரச்சட்டங்களுக்கு இடைப்பட்டகோணம் = 30°

2.11.5 கோண இடப்பெயர்ச்சி

துகளொன்றுOஎன்றபுள்ளியைமையமாககொண்டுrஆரமுடையவட்டப்பாதையைசுற்றிவருகிறதுஎன்க. t = 0 என்றநேரத்தில் துகள் Aபுள்ளியிலும்,tநேரத்திற்குபின்புஅத்துகள் Bபுள்ளியிலும் உள்ளது. எனவேசுழற்சிமையத்தைப் பொருத்து (அல்லதுவட்டமையம்O) கொடுக்கப்பட்டநேரத்தில் துகள் ஏற்படுத்தும் கோணம்,கோண இடப்பெயர்ச்சிஎனப்படும்.
அதாவதுகோண இடப்பெயர்ச்சி= ∠AOB =θ
கோண இடப்பெயர்ச்சியின் அலகுரேடியன் ஆகும்.
கோண இடப்பெயர்ச்சி (θ),வட்டவில்லின் நீளம் s (AB) மற்றும் ஆரம் r இவற்றுக்கு இடையேஉள்ளத் தொடர்புθ= $\frac{s}{r}$ அல்லதுs = r θ

கோணத்திசைவேகம் (ω)

கோண இடப்பெயர்ச்சிமாறும் வீதமேகோணத்திசைவேகம் எனப்படும்.
t நேரத்தில் ஏற்பட்டகோண இடப்பெயர்ச்சிθஎனில் கோணத்திசைவேகம்.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

கோணத்திசைவேகத்தின் அலகுரேடியன் /வினாடி (rad s^{-1})
கோணத்திசைவேகத்தின் திசைவலது கை பெருவிரல் விதியின் படி சுழல் அச்சின் திசையில் இருக்கும்.

கோணமுடுக்கம் (α)

கோணத் திசைவேகம் மாறும் வீதம்,கோணமுடுக்கம் எனப்படும்.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

கோணமுடுக்கம் ஒருவெக்டர் அளவாகும். இதன் திசைகோணத்திசைவேகத்தின் திசையிலேயே இருக்கவேண்டியஅவசியமில்லை.

தொடுகோட்டு முடுக்கம்

பொருளொன்றுrஆரமுடையவட்டப்பாதையில் இயங்குகிறதுஎன்க. Δtஎன்றகால இடைவெளியில் பொருள் Δsஎன்றவட்டவில் தொலைவைக் கடக்கிறது. அதுஏற்படுத்தும் கோணம்Δθஆகும்.

Δθவைப் பயன்படுத்திΔs ஐ பின்வருமாறுஎழுதலாம்.

$$\Delta s = r\Delta\theta \qquad (2.35)$$

Δtஎன்றகால இடைவெளியில்

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (2.36)$$

Δt→ 0,என்றஎல்லையில் மேற்கண்டசமன்பாட்டினை

$$\frac{ds}{dt} = r\omega \qquad (2.37)$$

என எழுதலாம். இங்கு $\frac{ds}{dt}$ என்பது நேர்க்கோட்டு வேகமாகும். (v) இது வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படும். மேலும் ω என்பது கோணவேகமாகும்.

எனவே சமன்பாடு (2.37) ஐv =rω

என எழுதலாம். இச்சமன்பாடு, நேர்கோட்டு வேகத்திற்கும், கோண வேகத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காட்டுகிறது.

இச் சமன்பாடு (2.38) வட்ட இயக்கத்திற்கு மட்டுமே பொருந்தும். பொதுவாக நேர்க்கோட்டு திசைவேகத்திற்கும், கோணத்திசை வேகத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.39)$$

வட்டப்பாதை இயக்கத்தில் சமன்பாடு (2.39) சமன்பாடு (2.38) ஆகமாறும். ஏனெனில் $\vec{\omega}$ மற்றும் $\vec{r}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

நேரத்தைப் பொருத்து சமன்பாடு (2.38) ஐ வகைப்படுத்தினால் (இங்கு r என்பது மாறிலி)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} = r\alpha$$

இங்கு $\frac{dv}{dt}$ என்பது தொடுகோட்டு முடுக்கமாகும். இதனை a_t எனவும் $\frac{d\dot{\omega}}{dt}$ என்பது கோண முடுக்கம். இதனை (α) எனவும் எழுதலாம். எனவே சமன்பாடு (2.40) ஆனது.

$$a_t = r\alpha \qquad (2.41)$$

இங்கு a_t என்பது பொருள் பெரும் தொடுகோட்டு முடுக்கமாகும்.

தொடுகோட்டு முடுக்கம் நேர்க்கொட்டுத் திசைவேகத்தின் திசையில் செயல்படுவதை இங்கு நினைவில் கொள்ளவும்.

2.11.6 வட்ட இயக்கம் (Circular Motion)

ஒரு புள்ளிப்பொருள் மாறாத வேகத்தில் ஒரு வட்டப்பாதை வழியே சுற்றி வருகிறது. அப்பொருள் சமகால இடைவெளிகளில் வட்டப்பாதையின் சம தூரத்தைக் கடக்கிறது எனில், அப்பொருள் சீரானவட்ட இயக்கத்தில் உள்ளது எனக் கூறலாம்.

சீரானவட்ட இயக்கத்தில் திசைவேகம் எப்போதும் மாற்றமடைந்துகொண்டே இருக்கும். ஆனால் வேகம் மாறாது இயற்பியல் படி திசைவேக வெக்டரின் எண் மதிப்பு நிலையாகவும், அதன் திசை தொடர்ந்து மாற்றமடைவதை அது காட்டுகிறது.

வட்ட இயக்கத்தில் திசைவேகத்தின் எண் மதிப்பு மற்றும் திசை இவ்விரண்டும் மாற்றமடைந்தால் நமக்கு சீரற்றவட்ட இயக்கம் கிடைக்கும்.

மையநோக்குமுடுக்கம்:

சீரானவட்ட இயக்கத்தில் திசைவேக வெக்டரின் எண்மதிப்பு (வேகம்) மாறாமல் அதன் திசை தொடர்ந்து மாற்றமடைந்து கொண்டே வரும் என்பதை நாம் முன்னர் பார்த்தோம்.

சீரானவட்ட இயக்கம் நடைபெறும் போது திசைவேக வெக்டரின் (நீலவண்ணம்) நீளம் மாற்றமடையாமல் உள்ளதை கவனிக்கவும். இது வேகம் மாறாமல் உள்ளதைக் காட்டுகிறது. இருப்பினும் திசைவேகம் வட்டத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுகோட்டுத் திசையில் செயல்படுகிறது. மேலும், முடுக்கம் வட்டத்தின் ஆரத்தின் வழியே மையத்தை நோக்கி செயல்படுகிறது. இம்முடுக்கத்தைமைய நோக்கு முடுக்கம் என அழைக்கலாம். இது எப்போதும் வட்டமையத்தை நோக்கியே செயல்படும்.

நிலை வெக்டர் மற்றும் திசைவேக வெக்டரின் எளிய வடிவியல் தொடர்பிலிருந்து, மையநோக்கு முடுக்கச் சமன்பாட்டை வருவிக்கலாம்.

நிலை வெக்டர் மற்றும் திசைவேக வெக்டர் இரண்டும் Δt என்ற சிறிய கால இடைவெளியில் θ கோணம் இடப்பெயர்ச்சி அடைவதை காட்டுகிறது. சீரான வட்ட இயக்கத்தில் $r = |\vec{r_1}| = |\vec{r_2}|$ மற்றும் $v = |\vec{v_1}| = |\vec{v_2}|$. துகளின் நிலை வெக்டர் $\vec{r_1}$ லிருந்து $\vec{r_2}$ க்கு மாறும்போது ஏற்படும் இடப்பெயர்ச்சியை $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ எனவும் அதன் திசைவேகம் $\vec{v_1}$ லிருந்து $\vec{v_2}$ க்கு மாற்றமடைவதை $\Delta \vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ எனவும் குறிப்பிடலாம். இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரின் எண்மதிப்புமற்றும் திசைவேகவெக்டரின் எண்மதிப்பு இரண்டும் பின்வரும் தொடர்பினை நிறைவேற்ற வேண்டும்.

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta v}{v} = 0$$

இங்குஎதிர்க்குறி, Δv வட்டமையத்தைநோக்கி (ஆரம் வழியேஉள்நோக்கி) செயல்படுவதைக் காட்டுகிறது.

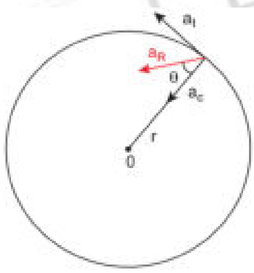
$$\Delta v = -v\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = -\frac{v^2}{r}$$

சீரானவட்ட இயக்கத்திலிருந்து $v = \omega r$, இங்கு ω என்பது மையத்தைப் பொருத்துதுகளின் கோணத்திசை வேகமாகும். எனவே மையநோக்கு முடுக்கத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம். $a = \omega^2 r$

சீரற்றவட்ட இயக்கம்

வட்ட இயக்கத்தில் வேகம் மாற்றமடைந்து கொண்டே இருந்தால், அதனை சீரற்ற வட்ட இயக்கம் என அழைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஊசல் குண்டுகட்டப்பட்ட கயிறு செங்குத்து வட்டத்தில் சுற்றி வரும் போது குண்டின் வேகம் எல்லா நேரங்களிலும் சமமாக இருப்பதில்லை. வட்ட இயக்கத்தின் வேகம் மாற்றமடையும் போதெல்லாம் துகள் படத்தில் உள்ளவாறுமைய நோக்கு முடுக்கம் (a_c) மற்றும் தொடு கோட்டுமுடுக்கம் (a_t) இரண்டையும் பெறும்.



சீரற்றவட்ட இயக்கத்தில் தொகுபயன் முடுக்கம் a_R

மையநோக்கு முடுக்கம் மற்றும் தொடுகோட்டு முடுக்கம் இவற்றின் வெக்டர் கூடுதலின் வழியே தொகுபயன் முடுக்கத்தினை (a_R) பெறலாம்.

மையநோக்கு முடுக்கம் $\frac{v^2}{r}$ எனில் தொகுபயன் முடுக்கத்தின் எண் மதிப்பை பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$a_R = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}$$

இந்தத் தொகுபயன் முடுக்கம், ஆரவெக்டருடன் θ கோணத்தை ஏற்படுத்துவதை படம் காட்டுகிறது. மேலும் கோணம் θவை பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\tan\theta = \frac{a_t}{\left(v^2/r\right)}$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.40

துகளொன்று 10 m ஆரமுடைய வட்டப்பாதையில் சுற்றுகிறது. அதன் நேர்க்கோட்டுவேகம் v = 3t. இங்குt வினாடியிலும் மற்றும் v ஆனது ms^{-1}லும்உள்ளது.

(அ) t=2வினாடியில் துகளின் மையநோக்கு முடுக்கம் மற்றும் தொடுகோட்டு முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ஆ) தொகுபயன் வெக்டர்,ஆரவெக்டருடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

t=2வினாடியில் துகளின் வேகம் v= 3t =6 ms^{-1}

t=2வினாடியில் துகளின் மையநோக்குமுடுக்கம்

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(6)^2}{10} = 3.6ms^{-2}$$

தொடுகோட்டுமுடுக்கம் $a_R = \frac{dv}{dt}$ =3 ms^{-2}

ஆர வெக்டருக்கும்,தொகுபயன் வெக்டருக்கும் உள்ளகோணம்

$$\tan\theta = \frac{\alpha_t}{a_c} = \frac{3}{3.6} = 0.833$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.833) = 0.69 \text{ ரேடியன்}$$

டிகிரியில் $\theta = 0.69 \times 57.27^\circ \approx 40$

இரவுபகல் இரு வேளைகளிலும் சூரியனைப் பொறுத்துநாம் ஒரேவேகத்தில் செல்கிறோமா?

புவி, சூரியனை நீர்வட்டப்பாதையில் சுற்றி வருகிறது. சூரியனைப் பொறுத்த புவிமையத்தின் திசைவேகத்தை $\vec{v}_c$என்க. $\vec{v}_c$ இந்த சூரியனைப் பொறுத்து புவி நீள்வட்டப்பாதையில் சுற்றி வருவதால் ஏற்படுகிறது. அதே நேரத்தில் புவிதன் அச்சினைப் பொறுத்து தற்சுழற்சி இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது. புவியின் மேற்பரப்பில் உள்ள அனைத்துப் பொருட்களும் புவியின் தற்சுழற்சி அச்சினைமையமாகக் கொண்டு$\vec{v}_s$என்ற திசைவேகத்தில் வட்டப்பாதை இயக்கத்தை மேற்கொள்கின்றன. இரவு நேரங்களில் $\vec{v}_c$மற்றும் $\vec{v}_s$இரண்டும் ஒரேதிசையில் அல்லது ஒன்றுக்கொன்று குறுங்கோண வேறுபாட்டுதிசையில் செயல்படுகின்றன. எனவே இரவில் சூரியனைப் பொருத்துபுவியின் மேற்பரப்பில் உள்ளபொருளின் திசைவேகம் $\vec{v}_{\text{இரவு}} = \vec{v}_c + \vec{v}_s$ஆகும் இதிலிருந்து புவியின் பரப்பில் எந்த ஒரு பொருளும் பகலைவிட இரவுநேரத்தில் சூரியனைப் பொறுத்துவேகமாகச் செல்லும் என அறியலாம். இது புவியின் சுழற்சியால் ஏற்படுகிறது. இதனை பின்வரும் படத்தின் மூலம் அறியலாம்.

வட்ட இயக்கத்தின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

மாறாத கோண முடுக்கத்துடன் α பொருளொன்று வட்ட இயக்கத்தை மேற்கொண்டால் நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தைப் போன்றே வட்ட இயக்கத்திற்கும் இயக்கச் சமன்பாடுகளை தருவிக்கலாம்.வட்ட இயக்கத்திலுள்ள துகளொன்றின் ஆரம்பக் கோணத் திசைவேகம் ω_0 என்க.t காலத்திற்குப் பின்பு அத்துகள் அடையும் இறுதிகோணத்திசைவேகம் ω. இக்கால இடைவெளியில் துகள் அடைந்தகோண இடப்பெயர்ச்சி θ என்க.கோணத் திசைவேகத்தில் மாற்றம் உள்ளதால் துகள் αஎன்ற கோண முடுக்கத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

பிரிவு (2.4.3) இல் நேர்க்கோட்டு இயக்கத்திற்கும் உள்ளதைப் பொன்றேவட்ட இயக்கத்திற்கும் இயக்கச் சமன்பாடுகளைஎழுதலாம்.

நேர்க்கோட்டு இடப்பெயர்ச்சி (s) ஐ கோண இடப்பெயர்ச்சிθஎனவும்

திசைவேகம (v) ஐ கோணத்திசைவேகம் (ω) எனவும்

முடுக்கம் (a) வைகோணமுடுக்கம் (α) எனவும்

ஆரம்ப திசைவேகம் (u) ஐ ஆரம்பக்கோணத்திசைவேகம் (ω_0) எனவும் மாற்றவும்.
இம்மரபினை பின்பற்றியபின்பு கிடைக்கும் வட்ட இயக்கத்தின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்	**வட்ட இயக்கத்தின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்**
$v = u + at$	$\omega = \omega_0 + at$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = u^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\theta$
$S = \frac{(v+u)t}{2}$	$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega)}{2}t$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

வட்டப்பாதை இயக்கத்திலுள்ள துகள் ஒன்றின் கோணமுடுக்கம் $\alpha = 0.2$ rad s^{-2}

அ) இத்துகள் 5 வினாடிகளுக்குப் பின்னர் அடைந்த கோண இடப்பெயர்ச்சி மற்றும்.

ஆ) நேரம் t= 5 வினாடியில் இத்துகளின் கோணத் திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க. (துகளின் ஆரம்பக் கோணத்திசைவேம் ஆகியவற்றைக் காண்க. (துகளின் ஆரம்பக் கோணத் திசைவேகம் சுழி எனக் கருதுக.

தீர்வு:

துகளின் ஆரம்பக் கோணத்திசைவேகம் (ω_0=0)துகளின் கோண இடப்பெயர்ச்சி

$$\theta = \omega_0 t \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-1} \times 25 = 25\,rad$$

டிகிரியில் $\theta = 2.5 \times 57.27° \approx 143°$

பொருளடக்கம்

இயற்பியல்

அலகு 3 இயக்க விதிகள்

அறிமுகம்:

பிரபஞ்சத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு பொருளும், மற்ற பொருட்களுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளன. குளிர்ந்த தென்றல் மரத்துடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது, மரம் மண்ணுடன் தொட்பு கொண்டுள்ளது. சுருங்கக்கூறின் அனைத்து உயிரினங்களும் இய்றகையுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளன. மற்ற உயிரினங்கள் இயற்கையுடன் கொண்டுள்ள தொடர்பைவிட, மனித இனம் இயற்கையுடன் கொண்டுள்ள தொடர்பு கொஞ்சம் வேறுபட்டதாகும். ஏனெனில் மனித இனம் இயற்கை நிகழ்வுகளை புரிந்து கொண்டு அவற்றை அறிவியல் முறையில் விளக்க முற்படுகிறது.

மனித இன வரலாற்றில் மனிதனால் மிகுந்த ஆர்வமுடன் கேட்கப்பட்ட அறிவியல் கேள்விகள் இயங்கும் பொருட்களைப் பற்றியது ஆகும். அவை “பொருட்கள் எவ்வாறு இயங்குகின்றன?” “பொருட்கள் ஏன் இயங்குகின்றன?” என்பன போன்றவை.

ஆச்சரியம் என்னவென்றால் இந்த எளிய கேள்விகள்தான் மினத இனத்தை பண்டைய நாகரீக காலத்திலிருந்து 21 ஆம் நூற்றாண்டின் தொழில்நுட்ப காலகட்டத்திற்கு வருவதற்கு பாதை அமைத்துக் கொடுத்தது.

ஒரு பொருள் நகரக் காரணம் ஒன்று அதை இழுக்கிறது அல்லது தள்ளுகிறது. உதாரணமாக, புத்தகம் ஒன்று ஓய்வு நிலையில் உள்ளது. வெளிப்புற விசை அதன் மீது செயல்படாதவரை அது நகராது. சுருங்கக்கூறின் பொருட்களை நகர வைக்க கட்டாயம் அனத் மீது ஒரு விசை செயல்பட வேண்டும். 2500 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் புகழ் பெற்ற தத்துவஞானி அரிஸ்டாட்டில் (Aristotle) விசை இயக்கத்தை ஏற்படுத்துகிறது என்று கூறினார். ஆவரின் கூற்று பொதுப்புரிதலின் (Common sense) அடிப்படையில் அமைந்திருந்தது. ஆனால் அறிவியல் கூற்றுகள் என்பது பொதுப்புரிதலின் அடிப்படையில் மட்டும் அமைந்திருக்க முடியாது. மாறாக அறிவியல் சோதனையின் அடிப்படையில் அனைவராலும் ஒப்புக்கொள்ளப்பட வேண்டும். 15 ஆம் நூற்றாண்டில், கலிலீயோ தொடர்ச்சியாக மேற்கொண்ட சோதனைகளின் அடிப்படையில் இயக்கம் பற்றிய அரிஸ்டாட்டிலின் கூற்றினை மறுத்தார். ஒரு பொருள் தொடர்ந்து இயங்குவதற்கு விசை அவசியமில்லை என்று கலிலீயோ ஒரு புதிய கருத்தினை முன்மொழிந்தார.

கலிலீயோ இயக்கம் பற்றிய தன்னுடை கருத்தை, ஒரு எளிய சோதனைமூலம் விளக்கினார். அச்சோதனையின்படி, படம் 3.1 (a) வில் காட்டியுள்ளபடி பந்து ஒன்று குறிப்பிட்ட கோணமுடைய சாய்தளம் ஒன்றின் மேற்புறத்திலிருந்து உருண்டு கீழே வருகிறது. ஆதன் தரையை அடைந்து சிறிது தூரம் உருண்டு சென்று எதிரே உள்ள அதே கோணமுடைய மற்றொரு சாய்தளத்தின் வழியே உருண்டு மேலே ஏறுகிறது. சாய்தறங்களை நன்கு வழுவழுப்பாகிய பின்னர் இச்சோதனையை மீண்டும் நிகழ்த்தும் போது பந்து முதல் சாய்தளத்தில் எவ்வளவு உயரத்திலிருந்து (L1) உருண்டு கீழே வந்ததோ அதே உயத்திற்கு இரண்டாவது சாய்தளம் வழியாக மேலே உருண்டு கலிலீயோவின்
சாய்தளம் மற்றும் பந்து சோதனை (a) இரண்டு சாய்தளங்களும் ஒரே சாய்கோணத்தில் உள்ளபோது (b) சாய்தளப்பரப்பின் வழுவழுப்புத்தன்மையை அதிகரித்த பின்னர் (c) இரண்டாவது சாய்தளத்தின் சாய்கோணத்தைக் குறைத்த பின்பா் (d) இரண்டாவது சாய்தளத்தின் சாய்கோணத்தை சுழியாக்கிய பின்னர் செல்கிறது (L2). (படம் 3.1) (b))இரண்டாவது சாய்தளத்தின் கோணத்தைக் குறைத்து (படம் 3.1 (உ)) அதே வழுவழுப்புடன் இச்சோதனையை மீண்டும் நிகழ்த்தும் போது, பந்து இரண்டாவது சாய்தளத்தில் சற்றே அதிக தூரம் உருண்டு சென்று எவ்வளவு உயரத்திலிருந்து வந்தோ அதே உயரத்தை சென்றடைகிறது.

சாய்கோணத்தை சுழியாக்கும் போது பந்து கிடைத்தளத் திசையில் என்றென்றும் தொடர்ந்து சென்று கொண்டே இருக்கும் (படம் 3.1 (d)).

ஒரு வேளை அரிஸ்டாட்டிலின் இயக்கம் பற்றிய கருத்து உண்மையாக இருப்பின், எவ்வளவு வழுவழுப்பான சாய்தளமாக இருந்தாலும் அந்தப் பந்து கிடைத்தளத் திசையில் உருண்டு சென்றிருக்காது. ஏனெனில், கிடைத்தளத்திசையில் எவ்விதமான விசையும் செயல்படவில்லை.

இந்த எளிய சோதனை மூலம் கலிலீயோ இயக்கம் தொடர்ந்து நடைபெற விசை அவசியமில்லை என்று நிரூபித்துக் காட்டினார். ஏனவே, விசையெல்படாத நிலையிலும் பொருளினால் தொடர்ந்து இயங்க முடியும்.

சுருங்கக் கூறின், அரிஸ்டாட்டில் இயக்கத்தோடு விசையினை இணைத்தார் ஆனால் கலிலீயோ, இயக்கத்தினை விசையிலிருந்து தனியே பிரித்தார்.

நியூட்டனின் விதிகள்:

கலிலீயோ, கெப்ளர் மற்றும் கோபர்நிக்கஸ் போன்ற அறிவியல் அறிஞர்களின் இயக்கம் பற்றிய கருத்துக்களை பகுத்து ஆராய்ந்து, இயக்கம் பற்றிய ஆழமான புரிதலை நியூட்டன் தனது மூன்று விதிகளின் வடிவில் ஏற்படுத்தினார்.

நியூட்டனின் முதல்விதி:

ஒரு பொருளின்மீது வெளிப்புற விசை ஒன்று செயல்படாதவரை அது, தனது ஓய்வு நிலையிலோ அல்லது மாறாத்திசைவேகத்திலுள்ள சீரான இயக்க நிலையிலோ தொடர்ந்து இருக்கும். பொருளொன்றின். தானே இயங்க முடியாதத் தன்மை அல்லது தனது இயக்க நிலையைத் தானே மாற்றிக்கொள்ள இயலாதத்தன்மைக்கு நிலைமம் என்று பெயர். நிலைமம் என்றாலே பொருள் தனது நிலையை மாற்றுவதை எதிர்க்கும் தன்மை என்று அழைக்கலாம். இயக்கச் சூழலுக்கு ஏற்ப நிலைமத்தினை மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) ஓய்வின் நிலைமம்:

ஓய்வு நிலையிலுள்ள பேருந்து ஒன்று இயங்கத்தொடங்கும் போது அப்பேருந்தில் உள்ள பயணிகள் நிலைமத்தின் காரணமாக திடீரென்று பின்னோக்கித் தள்ளப்படுகின்றனர். ஏனெனில் பயணியின் உடல் நிலைமப்பண்பின் காரணமாக தொடர்ந்து ஓய்வு நிலையிலேயே இருக்க முயல்கிறது. ஆனால் பேருந்து இயங்கத் தொடங்குகிறது. இதன் காரணமாகவே பயணிகளின் உடல் பின்னோக்கித் தள்ளப்படுகிறது.

ஓய்வின் நிலைமப்பண்பின் காரணமாக பயணிகள் பின்னோக்கித் தள்ளப்படுத்ல

தனது ஓய்வு நிலையைத் தானே மாற்றிக்கொள்ள இயலாத பொருளின் தன்மை, ஓய்வின் நிலைமம் எனப்படும்.

(2) இயக்கத்தில் நிலைமம்:

இயக்கத்திலுள்ள ஒரு பேருந்தன் தடையை (Brake) திடீரென்று அழுத்தும்போது, பேருந்தில் உள்ள பயணிகள் நிலைமத்தின் காரணமாக முன்னோக்கித் தள்ளப்படுகின்றனர். ஏனெனில், பயணியிலன் உடல் நிலைமப்பண்பின் காரணமாக தொடர்ந்து இயக்க நிலையிலேயே இருக்க முயல்கிறது. ஆனால் பேருந்து ஓய்வுநிலைக்கு வரத் தொடங்குகிறது.

மாறாத்திசை வேகத்திலுள்ள ஒரு பொருள் தனது இயக்க நிலையைத் தானே மாற்றிக்கொள்ள இயலாததன்மை, இயக்கத்தில் நிலைமம் எனப்படும்.

இயக்கத்தில் நிலைமப்பண்பின் காரணமாக பயணிகள் முன்னோக்கித் தற்றப்படுத்ல

(3) இயக்கத் திசையில் நிலைமம்:

ஒருமுனையில் கல் கட்டப்பட்ட, சுழற்சி இயக்கத்திலுள்ள கல்லின் கயிறு திடீரென்று அறுபட்டால், கல் தொடர்ந்து வட்டப்பாதையில் சுற்ற முடியாது. அக்கல் இல் காட்டியுள்ளவாறு வட்டத்தின் தொடுகோட்டுப்பாதையில் செல்லும். ஏனெனில் வெளிப்புறவிசை செயல்படாதவரை பொருளினால் தானே தன்றுடைய இயக்கத்திசையை மாற்றிக்கொள்ள இயலாது.

சுழற்சி இயக்கத்தில் இருந்த, கயிற்றிலிருந்து அறுபட்ட கல் நிலைமப்பண்பின் காரணமாக தொடுகோட்டுப்பாதையில் செல்லுதல்.

தனது இயக்கத்திசையினைத் தானே மாற்றிக்கொள்ள இயலாத பொருளின் தன்மை, இயக்கத்திசையில் நிலைமம் எனப்படும்.

பொருளொன்றின் ஓய்வுநிலை அல்லது மாறா திசைவேகத்திலுள்ள இய்கக நிலையை குறிப்பாயம் இன்றி கூறினால் அது பொருளற்றதாகிவிடும். எனவே, இயற்பியலில் அனைத்து இயக்கங்களும் குறிப்பாயத்தை பொருத்தே வரையறுக்க வேணடும். நிலைமக்குறிபாயம் என்ற ஒரு சிறப்புக் குறிப்பாயத்திற்கு மட்டுமே நியூட்டனின் முதல்விதியை பயன்படுத்த முடியும். உண்மையில் நியூட்டனினன் முதல்விதி நிலைமக் குறிப்பாயத்தைத்தான் வரையறுக்கிறது

நிலைமக் குறிப்பாயங்கள் (Inertial frames)

நிலைமக் குறிப்பாயத்திலிருந்து பார்க்கும்போது எவ்வித விசையும் செயல்படாத ஒரு பொருளானது ஓய்வு நிலையிலோ அல்லது மாறாதிசை வேகம் கொண்ட சீரான இயக்க நிலையிலோ காணப்படும். எனவே நிலைமக்குறிப்பாயம் என்ற ஒரு சிறப்புக் குறிப்பாயத்தில் உள்ள பொருள் எவ்வித விசையும் அதன்மீது செயல்படாத நிலையில் மாறாத்திசைவேகம் கொண்ட இயக்க நிலையிலோ அல்லது ஓய்வு நிலையிலோ காணப்படும். ஆனால் ஒரு பொருள் விசையை உணர்கிறதா இல்லையா என்பதை நாம் எவ்வாறு அறிவது? புவியிலுள்ள அனைத்துப் பொருட்களும் புவியீர்ப்பு விசையினை உணரும். இலட்சிய நிலையில் ஒரு பொருள் புவி மற்றும் பிற பொருட்களை விட்டு வெகுதொலைவில் உள்ளபோது மட்டுமே விசைகளற்ற நிலையை (Free body) அடையும். அப்பொருளுக்கு நியூட்டனின் முதல்விதி முழுமையாகப் பொருந்தும். வெகுதொலைவில் உள்ள அப்பகுதியை நிலைமக் குறிப்பாயமாகக் கருதலாம். ஆனால் நடைமுறையில் இது போன்ற நிலைமக் குறிப்பாயம் சாத்தியமற்றது. நடைமுறையில் புவியினை நாம் ஒரு நிலைமக்குறிப்பாயமாகக் கருதலாம். ஏனெனில் ஆய்வத்தில் மேசை மீது வைக்கப்பட்ட புத்தகம் எப்போதும் ஓய்வு நிலையிலேயே உள்ளதாக கருதப்படுகிறது. அப்பொருள் எப்போதும் கிடைத்தளத்திசையில் முடுக்கமடைவதில்லை. ஏனெனில் கிடைத்தளத்திசையில் அதன்மீது எவ்விதமான விசையும் செயல்படுவதில்லை. எனவே, அனைத்து இயற்பியல் ஆய்வுகள் மற்றும் கணக்கீடுகளுக்கு ஆய்வகத்தினை ஒரு நிலைமக்குறிப்பாயமாகக் கருதலாம்.

நாம் இந்த முடிவை எடுக்க பொருளின் கிடைத்தள இயக்கத்தினை மட்டும் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டோம். ஏனென்றால் பொருளின்மீது கிடைத்தளத் திசையில் எந்த விசையும் செயல்படவில்லை. ஆனால் இதே முடிவை எடுக்க நாம் செங்குத்துத் திசையில் பொருளின் இயக்கத்தை பகுத்தாராயக் கூடாது. ஏனெனில் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையும் மேல்நோக்கிச் செயல்படும் செங்குத்து விசையும் ஒன்றை ஒன்று சமன்செய்து பொருளை ஓய்வுநிலையில் வைக்கின்றன.

எனவே, நியூட்டனின் முதல்விதி விசைகளற்ற பொருளின் இயக்கத்தை ஆராய்கிறதே தவிர செல்படும் விசைகளின் தொகுபயன் மதிப்பு சுழியாக உள்ள பொருட்களின் இயக்கத்தை ஆராய்வதில்லை.

நிலைமக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து மாறாத் திசைவேகத்துடன் செல்லும் இரயில் வண்டி ஒன்றைக்கருதுக. இரயில்வண்டிக்கு வெளியே நிலைமக்குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து ஓய்வுநிலையிலுள்ள பொருள், இரயில் வண்டிக்கு உள்ளே அமர்ந்திருக்கும் பயணிக்கு, இரயில் வண்டியைப் பொருத்து மாறாத்திசை வேகத்துடன் இயக்க நிலையில் இருப்பதுபோன்று தெரியும். ஏனெனில் இங்கு இரயில் வண்டி நிலைமைக் குறிப்பாயமாகக் கருதப்படுகிறது.

அனைத்து நிலைமக் குறிப்பாயங்களும் ஒன்றைப் பொருத்து மற்றொன்று மாறாத்திசைவேகத்துடன் இயங்குகிறது.

ஒரு நிலைமக் குறிப்பாயத்தில் ஓய்வு நிலையில் உள்ளது போன்று தோன்றும் ஒரு பொருள், மற்றொரு நிலைமக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து மாறாத் திசை வேகத்துடன் இயக்க நிலையில் இருப்பது போன்று தோன்றும். தரையில் நின்று கொண்டிருக்கும் ஒரு நபரைப் பொருத்து, V என்ற மாறாதிசை வேகத்தின் வாகனம் ஒன்று சென்று கொண்டிருக்கிறது. தரையில் நின்று கொண்டிருக்கும்

மனிதனும், அவனைப் பொறுத்து மாறாத் திசைவேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் வாகனம் இரண்டுமே நிலைமக் குறிப்பாயங்கள் ஆகும்.

மனிதன் மற்றும் வாகனம் இரண்டும் நிலைமக்குறிப்பாயங்கள்

மாறா திசைவேகத்தில் சென்று கொண்டுள்ள இரயில் வண்டியின் உள்ளே வழுவழுப்பான மேசை மீது வைக்கப்பட்டுள்ள பொருள் ஒன்றைக் கருதுக. இரயில் வண்டி திடீரென்று முடுக்கமடையும்போது எவ்விதமான விசையும் செயல்படாத நிலையில் மேசை மீதுள்ள பொருள் எதிர்த்திசையில் முடுக்கமடைவது போன்று தோன்றும். இது நியூட்டனின் முதல் விதிக்கு முற்றிலும் எதிராக உள்ளது. ஏனெனில், எவ்வித விசையும் செயல்படாத நிலையில் பொருள் முடுக்கமடைகிறது.

இதிலிருந்து நாம் புரிந்து கொள்ளவேண்டிய உண்மை என்னவெனில், இரயில்வண்டி முடுக்கமடையும்போது அது ஒரு நிலைமக் குறிப்பாயம் அல்ல. எடுத்துக்காட்டாக, படம் 3.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ள தரையைப் பொருத்து $\bar{a}$ முடுக்கத்துடன் செல்லும் இரண்டாவது வாகனம் நிலைமக்குறிப்பாயம் அல்ல. மாறாக அது நிலைமமற்றக் குறிப்பாயம் (Non-inertial frame) ஆகும்.

நிலைமமற்றக் குறிப்பாயம் (a முடுக்கத்துடன் செல்லும் வாகனம் 2)

இவ்வகையான நிலைமமற்ற குறிப்பாயங்களுக்கு முடுக்கப்பட்ட குறிப்பாயங்கள் (accelerated frames of references) என்ற பெயர். சுழலும் குறிப்பாயங்களும் முடுக்கப்பட்ட குறிப்பாயங்களே, ஏனெனில், சுழற்சி இயக்கத்திற்கு முடுக்கம் அவசியமாகும். இக்கருத்தின்படி, புவி உண்மையில் ஒரு நிலைமக் குறிப்பாயம் அல்ல. ஏனெனில் புவிக்கு தற்சுழற்சி மற்றும் நீள்வட்டச் சுழற்சி என்ற இரு இயக்கங்கள் உள்ளன

நடைமுறையில் காணப்படும் சில பொதுவான இயக்கங்களுக்கு புவியின் சுழற்சியினால் ஏற்படும் விறைவுகளைப் புறக்கணிக்கலாம். உதாராணமாக எறிபொருளின் இயக்கம், ஆய்வகம் ஒன்றில் கணக்கிடப்படும் தனி ஊசலின் அலைவு நேரம் போன்றவற்றில் புவியின் தற்சுழற்சி விளைவுகளின் தாக்கம் புறக்கணிக்கத்தக்க அளவிலேயே காணப்படும். எனவே, இத்தகைய நேர்வுகளில் கருதலாம். ஆனால் அதே நேரத்தில் செயற்கைக்கோள் ஒன்றின் இயக்கம் மற்றும் புவியின் காற்று மேலடுக்குச் சுழற்சி போன்ற நிகழ்வுகளில் புவியினை ஒரு நிலைமக் குறிப்பாயமாகக் கருத இயலாது. ஏனெனரில் புவியின் தற்சுழற்சி இவற்றின் மீது வலிமையான தாக்கத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி:

ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் விசையானது அந்தப் பொருளின் உந்த மாறுபாட்டு வீத்திற்கு சமமாகும்.

$$\dot{F} = \frac{d\dot{p}}{dt}$$

சுருங்கக் கூறின், எப்பொழுதெல்லாம் ஒரு பொருளின் உந்தத்தில் மாற்றம் ஏற்படுகிறதோ, அப்பொழுதொல்லாம் அப்பொருளின்மீது விசை செயல்படுகிறது. பொருள் ஒன்றின் உந்தம் என $\bar{p} = m\vec{v}$ வரையறுக்கப்படுகிறது. பொருட்கள் இயங்கும்போது பெரும்பாலான நேரங்களில் அதன் நிறை மாறாமல் ஒரு மாறிலியாகவே இருக்கிறது.

அத்தகைய நிகழ்வுகளில் மேற்கண்ட சமன்பாடு பின்வரும் எளிய வடிவினைப் பெறுகிறது.

$$\dot{F} = \frac{d\left(m\dot{v}\right)}{dt} = m\frac{d\dot{v}}{dt} = m\dot{a}$$

$$\dot{F} = m\bar{a}$$

பொருள் எப்பொழுதொல்லாம் முடுக்கமடைகிறதோ, அப்பொழுதெல்லாம் அதன்மீது ஒரு விசை செயல்படுகிறது என்ற உண்மையை மேற்கண்ட சமன்பாடு நமக்கு உணர்த்துகிறது. விசை $\vec{F}$ மற்றும் முடுக்கம் $\bar{a}$ இரண்டும் எப்பொழுதும் ஒரேதிசையில் செயல்படும்.

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி என்பது அரிஸ்டாட்டிலின் இயக்கம் பற்றிய கருத்திலிருந்து அடிப்படையிலேயே வேறுபட்டதாகும். நியூட்டனைப் பொறுத்தவரை இயக்கத்தினை ஏற்படுத்த விசை அவசியமில்லை. மாறாக இயக்கத்தில் ஒரு மாற்றத்தை ஏற்படுத்தத்தான் விசை தேவைப்படுகிறது. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை நாம் நிலைமக் குறிப்பாயங்களில் மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

முடுக்கப்பட்ட குறிப்பாயங்களுக்கு நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை இதேவடிவில் பயன்படுத்த முடியாது, சில மாற்றங்கள் தேவைப்படும்.

SI அலகு முறையில் விசையின் அலகு நியூட்டன். இதன் குறியீடு N ஆகும்.

1 kg நிறையுடைய பொருளின்மீது ஒரு விசை செயல்பட்டு, அந்த விசையின் திசைலேயே 1 m s^{-2} முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தினால் அவ்விசையின் அளவே ஒரு நியூட்டன் எனப்படும்.

சறுக்கிச் செல்லும் பொருட்கள் பற்றிய அரிஸ்டாட்டில் மற்றும் நியூட்டனின் கருத்து:

பிரிவு 3.1 இல் விவாதிக்கப்பட்ட சாய்தளம் மற்றும் பந்து சோதனைக்கான சரியான விறக்கத்தினை நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி வழங்குகிறது. அந்த சோதனையில் உராய்வினைக் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளும்போது பந்து சாய்தளத்தின் அடிப்பரப்பை அடைந்தவுடன் சிறிது தூரம் உருண்டு பின்பு ஓய்வு நிலையை அடைகிறது.

இதற்குக் காரணம் பந்தின் திசைவேகத்திற்கு எதிரான திசையில் ஒரு உராய்வு விசை செயல்பட்டு பந்தினை ஓய்வு நிலைக்குக் கொண்டுவருகிறது. இவ்வுராய்வு விசைதான் திசைவேகத்தைப் படிப்படியாகக் குறைத்து அதனை சுழியாக்கி பொருளின் இயக்கத்தை நிறுத்துகிறது. ஆனால் அரிஸ்டாட்டிலின் கருத்துப்படி, பொருள் சாய்தளத்தின் அடிப்பரப்பை அடைந்த உடன் சிறிது தூரம் உருண்டு சென்று பின்னர் ஓய்வு நிலைக்கு வரும். ஏனெனில் அப்பொருளின் மீது எவ்விதமான விசையும் செயல்படவில்லை.

அடிப்படையில் அரிஸ்டாட்டில் பொருளின் மீதுசெயல்படும் உராய்வு விசையை முற்றிலுமாகப் புறக்கணித்து விட்டார்.

பொருட்களின் இயக்கம் பற்றிய அரிஸ்டாட்டில், கலிலியோ மற்றும் நியூட்டனின் கருத்துக்கள்

நியூட்டனின் மூன்றாம் விதி:

a வைக் கருதுக. எப்பொழுதெல்லாம் ஒரு பொருள் (1) இன்னொரு பொருளின் (2) மீது ஒரு விசையைச் செலுத்துகிறதோ ($\vec{F}_{21}$), அப்பொழுதெல்லாம் அந்த இரண்டாவது பொருளும் (2) அவ்விசைக்குச் சமமான, எதிர்திசையில் செயல்படும் ஒரு விசையை ($\vec{F}_{12}$) முதல் பொருளின் மீது செலுத்தும். இவ்விரண்டு விசைகளும் இரு பொருட்களையும் இணைக்கும் கோட்டின் வழியே செயல்படும்.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

விசைகள் சமமாகவும், எதிர்சோடிகளாகவும் (opposite pair) தோன்றும் என்பதை நியூட்டனின் மூன்றாம் விதி உறுதிப்படுத்துகிறது. தனித்த விசை அல்லது ஒரேயொரு விசை என்பது இயற்கையில் தோன்றுவதில்லை. நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி, எந்தவொரு செயல் விசைக்கும் (action force) சமமான எதிர் செயல்விசை (reaction force) உண்டு. மாறாக, வெவ்வேறு பொருட்களின் மீது செயல்படுகின்றன. ஏதேனும் ஒரு விசையை செயல்விசை என்று அழைத்தால் மற்றொன்றை எதிர்ச்செயல்விசை என்று அழைக்க வேண்டும். நியூட்டனின் மூன்றாம் விதி நிலைமம் மற்றும் முடுக்குவிக்கப்பட்ட இவ்விரண்டு குறிப்பாயங்களுக்கும் பொருந்தும்.

இச்செயல் - எதிர்ச்செயல் விசைகள் காரணம் மற்றும் விளைவு (cause and effect) வகைகள் அல்ல. எவ்வாறெனில், முதல்பொருள் இரண்டாவது பொருளின் மீது ஒரு விசையினைச் செலுத்தும் அதே கணத்தில் இரண்டாவது பொருள் முதல் பொருளின் மீது சமமான எதிர்விசையைச் செலுத்தும்.

நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிக்கான செயல்விளக்கம்

(a) சுத்தியால் மற்றும் ஆணி

(b) சுவற்றில் பட்டு பின்னோக்கி வரும் பந்து

(c) உராய்வுடன் தரையில் நடத்தல்

நியூட்டன் விதிகள் பற்றிய ஒரு உரையாடல்:

1. நியூட்டன் விதிகள் வெக்டர் விதிகளாகும். $\dot{F} = m\bar{a}$ என்பது ஒரு வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும். அடிப்படையில் இச்சமன்பாடு மூன்று ஸ்கேலர் சமன்பாடுகளுக்கு இணையானதாகும். கார்டீசியன் ஆயக்கூறுகளின் அடிப்படையில் இதனை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = ma_y\hat{j} + ma_z\hat{k}$$

இருபுறமும் வெக்டர் கூறுகளை ஒப்பிடும்போது நமக்குக் கிடைக்கும் ஸ்கேலர் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$F_x = ma_x$. இங்கு x அச்சுத்திசையில் ஏற்படும் முடுக்கம் (a_x), விசையின் x அச்சுக்கூறினை (F_x) மட்டுமே சார்ந்ததாகும்.

$F_y = ma_y$. இங்கு y அச்சுத்திசையில் ஏற்படும் முடுக்கம் (a_y), விசையின் y அச்சுக் கூறினை (F_y) மட்டுமே சார்ந்ததாகும்.

$F_z = ma_z$. இங்கு z அச்சுத்திசையில் ஏற்படும் முடுக்கம் (a_z), விசையின் z அச்சுக் கூறினை (F_z) மட்டுமே சார்ந்ததாகும்.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து நாம் அறிய வேண்டியது என்னவெனில், y திசையில் செயல்படும்விசை, x திசையில் ஏற்படும் முடுக்கத்தை எவ்வித்திலும் பாதிக்காது. அதேபோன்று F_z ஆனது a_y மற்றும் a_x ஐ எவ்வித்திலும் பாதிக்காது. இந்தப்புரிதல் கணக்குகளைத் தீர்வு காண்பதில் முக்கிய பங்காற்றுகிறது.

2. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் (t), பொருள் அடையும் முடுக்கம், அதே நேரத்தில் அப்பொருளின் மீது செயல்படும் விசையினை மட்டுமே சார்ந்தது. அந்நேரத்திற்கு (t) முன்னர் செயல்பட்ட விசினைப் பொருத்ததல்ல. இதனை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

பொருளின் முடுக்கம், கடந்தகால விசையைச் சார்ந்ததல்ல. எடுத்துக்காட்டாக கிரிக்கெட் வியைாட்டில் சுழற்பந்து அல்லது வெகப்பந்து வீச்சாளரால் வீசப்பட்ட பந்து அவரின் கரத்தை விட்டு விடுபட்ட பின்பு புவியீர்ப்பு விசை மற்றும் காற்றின் உராய்வு விசை இவைகளை மட்டுமே உணரும். இந்நிலையில் பந்தின் முடுக்கம் அது எவ்வாறு (எவ்வளவு வேகமாக அல்லது மெதுவாக) வீசப்பட்டது என்பதைப் பொருத்ததல்ல.

3. பொதுவாக பொருளின் இயக்கம் விசையின் திசையிலிருந்து மாறுபட்டு அமையலாம். சில நேரங்களில் விசையின் திசையிலேயே பொருள் இயங்கினாலும், பொதுவாக இது உண்மையல்ல. அதற்கான சில உதாரணங்களை கீழே காணலாம்.

நேர்வு (1): விசையும் இயக்கமும் ஒரே திசையில்:

ஆப்பிள், புவியினை நோக்கி விழும்போது ஆப்பிளின் இயக்கத் திசையும் (திசை வேகமும்), ஆப்பிளின் மீது செயல்படும் புவிஈர்ப்பு விசையும் ஒரே கீழ்நோக்கிய திசையில் அமைந்துள்ளது. இது (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(a) விசை மற்றும் இயக்கம் ஒரே திசையில்

நேர்வு (2) விசையும் இயக்கமும் வெவ்வேறு திசைகளில்:

நிலா புவியினை நோக்கி ஒரு விசையை உணர்கிறது ஆனால், நிலா புவியை ஒரு நீள்வட்டப்பாதையில் சுற்றி வருகிறது. இந்நிகழ்வில் இயக்கதின் திசை விசையின் திசையிலிருந்து மாறுபட்டு உள்ளதை (b) யிலிருந்து அறியலாம்.

(b) விசை மற்றும் இயக்கம் வெவ்வேறு திசைகளில் (புவியை நீள்வட்டப்பாதையில் சுற்றிவரும் நிலா)

நேர்வு (3) விசையும் இயக்கமும் எதிரெதிர் திசையில்:

பொருள் ஒன்றை செங்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியும்போது இயக்க திசை மேல் நோக்கியும், பொருளின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையின் திசை கீழ்நோக்கியும் செயல்படும். இது (c) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(c) விசையும், இயக்கமும் எதிரெதிராக

நேர்வு (4) சுழி நிகர விசையும் பொருளின் இயக்கம்:

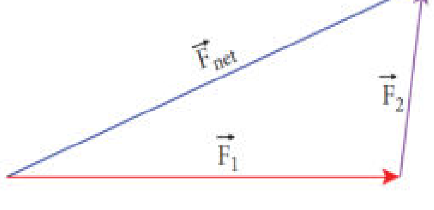
மேகத்திலிருந்து விடுபட்ட மழைத்துளி ஒன்று கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீல்ப்பு விசை மற்றும் மேல் நோக்கிச் செயல்படும் காற்றின் இழுவிசை இவ்விரண்டு விசைகளையும் உணர்கிறது. மழைத்துளி கீழ் நோக்கி வரும் போது காற்றின் இழுவிசை (பாகியல் விசை) அதிகரித்துக் கொண்டே சென்று ஒரு நிலையில் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையை சமன்செய்துவிடும். ஆக்கணத்திலிருந்து மழைத்துளி தரையில் விழும்பவரை மாறாத்திசை வேகத்துடன் வருகிறது. எனவே மழைத்துளி சுழி நிகர விசையுடனும் ஆனால் சுழியற்ற முற்றத்திசை வேகத்துடனும் (terminal velocity) தரையை அடைகிறது. இது (d) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(d) சுழிநிகரவிசை மற்றும் சுழியற்ற முற்றுத்திசை வேகத்துடன் தரையை அடையும் மழைத்துளி

4. பல்வேறு விசைகள்

1) $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dot{F}_3 \ldots \dot{F}_n$ விசைகள் ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் போது, அப்பொருளின் மீது செல்படும் நிகரவிசை ($\dot{F}_{net,}$) தனித்தனி விகைளின் வெக்டர் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். அந்த நிகர விசை ($\dot{F}_{net,}$) பொருளின் மீது முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தும்.

$$\dot{F}_{net} = \dot{F}_1, \dot{F}_2, \dot{F}_3 \ldots \dot{F}_n$$



$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = \dot{F}_{net}$$

இரண்டு விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல்

$$\dot{F}_{\text{net}} = m\bar{a}$$

இத்தகைய நேர்வகளில் நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்

முடுக்கத்தின் திசை, நிகர (net) விசையின் திசையில் இருக்கும்

எடுத்துக்காட்டு: வில்லும் அம்பும்

வில் மற்றும் அம்பு-நிகர விசை அம்பின் மீது உள்ளது.

2) நியூட்ன் இரண்டாம் விதியை பின்வரும் வடிவிலும் எழுதலாம் ஏனெனில் முடுக்கமென்பது பொருளின் இப்பெயர்ச்சி வெக்டரின் இரண்டாம்படி வகைகெழு ஆகும். $\left(\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$, எனவே பொருளின் மீது செயல்படும் விசை பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது.

$$\dot{F} = m\,\frac{d^2\dot{r}}{dt^2}$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து நாம் அறிந்துகொள்வது நியூட்டன் இரண்டாம் விதியானது அடிப்படையில் ஒரு இரண்டாம்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். எப்பொழுதெல்லாம் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரின் இரண்டாம் வகைக்கெழு சுழியல்லாத மதிப்பினை பெறுகிறதோ அப்பொழுதெல்லாம் பொருளின் மீது விசை செயல்படுகிறது. பொருளின் மீது எவ்விதமான விசையும் செயல்படாத நிலையில் நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி, $m\,\frac{d^2\dot{r}}{dt^2}=0$ அதாவது பொருள் மாறாதத்திசை வேகத்துடன் (v=மாறிலி) இயங்குகின்றது என்று நமக்கு உணர்த்துகிறது. இதிலிருந்து நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி, முதல்விதியோடு இயல்பாகப் பொருந்துவதை நாம் உணரலாம். ஆனாலும் ஒரே பொருளின் மீது எந்த விசையும் செயல்படாத போது நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியானது முதல் விதியாக மாறுகிறது என்று நாம் கருதக்கூடாது. நியூட்டனின் முதல் விதி மற்றும் இரண்டாம் விதி இவ்விரண்டும் ஒன்றையொன்று சாராத விதிகளாகும். அவை இயல்பாக ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துகின்றன. ஆனால் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றை தருவிக்க இயலாது (cannot derived from each other).

7. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி காரணம் மற்றும் விளைவு வகையைச் சார்ந்தது. விசை ஒரு காரணம் எனில் முடுக்கம் அதற்கான விளைவு ஆகும். மரபுப்படி சமன்பாட்டின் இடதுகை பக்கம், விளைவையும் எழுத வேண்டும். எனவே நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியின் சரியான வடிவம் $m\bar{a} = \dot{F}$ அல்லது $\frac{d\dot{p}}{dt}\dot{F}$

நியூட்டன் விதிகளின் பயன்பாடு:

தனித்த பொருளின் விசைப்படம் (Free Body Dragram)

தனித்த பொருளின் விசைப்படம் என்பது நியூட்டன் விதிகளைப் பயன்படுத்தி பொருளின் இயக்கத்தினை பகுத்தறியப் பயன்படும் ஒரு எளிய முறையாகம். தனித்த பொருளின் விசைப்படத்தை உருவாக்கும் போது கீழ்கண்ட நெறிமுறைகளை வரிசைப்படி பின்பற்ற வேண்டும். அவை

1. பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகளைக் கண்டறிய வேண்டும்.

2. பொருளை ஒரு புள்ளியாகக் குறிப்பிட வேண்டும்.

3. பொருள் மீது செயல்படும் விசைகளைக் குறிப்பிடும் வெக்டர்களை வரைய வேண்டும். தனித்த விசைப்படம் வரையும்போது பொருட்கள் ஏற்படுத்தும் விசைகளை படத்தில் குறிப்பிட்டுக் காட்டக்கூடாது என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு.

m நிறையுள்ள புத்தகம் ஒன்று மேசை ஒன்றின் மீது ஓய்வு நிலையில் உள்ளது.
1. புத்தகத்தின் மீது செயல்படும் விசைகள் யாவை?
2. பத்தகம் செலுத்தும் விசைகள் யாவை?
3. புத்தகத்தின் விசைப்படத்தை வரைக.

தீர்வு

1) புத்தகத்தின் மீது இரண்டு விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை

i. கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவிஈர்ப்பு விசை (mg).

ii. புத்தகத்தின் மீது மேசையின் பரப்பு ஏற்படுததும் செங்குத்து விசை (N). இது மேல் நோக்கியத்திசையில் செயல்படும்.

2) நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி, புத்தகம் இரண்டு எதிர்விசைகளைத் தருகிறது.

i. புவியீர்ப்பு விசை (mg) க்கு எதிராக புத்தகம் புவியின்மீது செலுத்தும் விசை. இது மேல்நோக்கிச் செயல்படும்.

ii. மேசையின் பரப்புமீது, செங்குத்து விசை (N) க்கு எதிராக புத்தகம் செலுத்தும் விசை. இவ்விசை கீழ்நோக்கி செயல்படும்.

3. புத்தகத்தின் தனித்த பொருள் விசைப்படம் மேலே உள்ள படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு:

2.5 kg மற்றும் 100 kg நிறையுடைய இரண்டு பொருள்களின் மீதும் 5 N விசை செயல்படுகிறது. ஒவ்வொரு பொருளின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி (எண்மதிப்பு அளவில்) F=ma

2.5 kg நிறையுடைய பொருள் பெறும் முடுக்கம்

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5}{2.5} = 2ms^{-2}$$

100 kg நிறையுடைய பொருள் பெறும் முடுக்கம்

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5}{100} = 0.05ms^{-2}$$

ஆப்பிள், மரத்திலிருந்து கீழே விழும் போது அது புவி ஈர்ப்பு விசையை உணரும். நியூட்டனின் மூன்றவாது விதிப்படி ஆப்பிளும் இதற்குச் சமமான எதிர்விசையை புவியின் மீது செலுத்தும். இவ்விரண்டு விசைகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருப்பினும் அவைகள் பெரும் முடுக்கம் வெவ்வேறானவை.

புவியின் நிறை, ஆப்பிளின் நிறையுடன் ஒப்பிடும்போது மிகவும் அதிகம். நிறையுடன் ஒப்பிடும்போது மிகவும் அதிகம். எனவே, ஆப்பிள் மிக அதிக முடுக்கத்தைப் பெறுகிறது. ஆனால்

புவி மிகவும் குறைவான புறக்கணிக்கதக்க முடுக்கத்தையே பெறுகிறது. எனவேதான் ஆப்பிள் கீழே விழும் போது புவி ஓய்வு நிலையில் உள்ளது போன்று தோன்றுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு.

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dot{F}_3$ மூன்று விசைகளில் பெரும விசை எது?

தீர்வு

விசை ஒரு வெக்டர். ஒரு வெக்டரின் எண் மதிப்பு அதன் நீளத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்களில் $\dot{F}_1$ ன் நீளம் அதிகம் எனவே $\dot{F}_1$ வெக்டர் பெரும விசையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு.

400 g நிறை கொண்ட மாங்காய் ஒன்று மரத்தில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தி மாங்காயைத் தாங்கியுள்ள காம்பின் இழுவிசையைக் காண்க.

தீர்வு

குறிப்பு: நியூட்டன் விதிகளைப் பயன்படுத்தும் போது பின்வரும் கருத்துக்களை கவனமுடன் பின்பற்ற வேண்டும்.

1. பொருத்தமான நிலைமக்குறிப்பாயம் ஒன்றைக் கருத வேண்டும் பொதுவாக புவியினை ஒரு நிலைமக்குறிப்பாயமாகக் கருதலாம்.

2. நியூட்டன் விதிகளைப் பயன்படுத்தத் தேவையான அமைப்பைக் கண்டறிய வேண்டும். அவ்வமைப்பானது ஒரு பொருள் அமைப்பாகவோ அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொருள்கள் சேர்ந்த அமைப்பாகவோ இருக்கலாம்.

3. பொருளின் மீது செயல்படும் செயல்படும் விசைகளைக் கண்டறிந்து அவற்றைக் கொண்டு விசைப்படம் வரைய வேண்டும். பின்னர் நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை பயன்படுத்த வேண்டும். இடப்பக்கம் பொருளினி மீது செயல்படும் விசைகளை வெக்டர் வடிவில் குறிப்பிட வேண்டும். வலப்பக்கம் பொருளின் நிறை மற்றும் அப்பொருள் முடுக்கம் இவற்றின் பெருக்கல்பலனை வெக்டர் வடிவில் குறிப்பிட வேண்டும். ஏனெனில் முடுக்கம் ஒரு வெக்டர் அளவாகும்.

4. முடுக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் விசையைக் கண்டறியலாம். அதே போல் விசை கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் பொருளின் முடுக்கத்தைக் காணலாம்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கருத்துக்களின்படி படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு தரையில் ஒரு நிலைமக் குறிப்பாயத்தைக் கருத வேண்டும்.

மாங்காயின் மீது பின்வரும் இரண்டு விசைகள் செயல்படுகின்றன.

i. மாங்காயின் மீது எதிர்க்குறி y அச்சுத்திசையில் கீழ் நோக்கி செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை, நேர்க்குறி y அச்சுத்திசையில் செயல்படும் மாங்காயைத் தாங்கியுள்ள காம்பு, மாங்காயின் மீது செலுத்தும் மேல் நோக்கிய இழுவிசை. மாங்காயின் விசைப்படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$\overrightarrow{F}_g = mg\left(-\hat{j}\right) = mg\hat{j}$$

இங்கு mg என்பது புவியீர்ப்பு விசையின் எண்மதிப்பு மற்றும் $\left(-\hat{j}\right)$ என்பது எதிர் குறி y அச்சுத்திசையைக் குறிக்கும் ஓரலகுவெக்டர்.

$\vec{T} = T\hat{j}$

இங்கு T என்பது மாங்காயின் மீது செயல்படும் இழுவிசை மற்றும் $\left(-\hat{j}\right)$ என்பது நேர்குறி y அச்சுத்திசையைக் குறிக்கும் ஓரலகு வெக்டர்

$$\overline{F}_{net} = \overline{F}_g + \overline{T} = -mg\hat{j} + T\hat{j} = \left(T - mg\right)\hat{j}$$

நியூட்டன் இரண்டாம் விதிப்படி, $\vec{F}_{net} = m\overline{a}$ நம்மைப்பொருத்து (நிலைமக்குறிப்பாயத்தை பொருத்து) மாங்காய் ஓய்வு நிலையில் உள்ளது எனவே அதன் முடுக்கம் சுழி ($\overline{a}$ =0)
எனவே, $\vec{F}_{net} = m\overline{a}$ =0

$$\left(T - mg\right)\hat{j} = 0$$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டின் இரண்டுபக்கங்களின் வெக்டர் கூறுகளை ஒப்பிடும்போது T-mg=0 எனக்கிடைக்கும்

எனவே, மாங்காய்க் காம்பின் இழுவிசை T=mg மாங்காயின் நிறை m=400ப மேலும் $g=9.8ms^{-2}$

எனவே மாங்காயின் மீது செயல்படும் இழுவிசை
T=0.4 x 9.8 =3.92 N

எடுத்துக்காட்டு.

இருசக்கர வாகனங்களில் தனித்தனியே பயணம் செய்யும் இருவரில், தரையைப் பொருத்து மாறா திசைவேகத்தில் பயணம் செய்கிறார். மற்றொருவர் தரையை பொதுத்து $\overline{a}$ என்ற முடுக்கத்துடன் பயணம் செய்கிறார். இவ்விரண்டு பயணிகளில் எந்தப் பயணி நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்?

தீர்வு:

தரையைப் பொருத்து $\overline{a}$ என்ற முடுக்கத்துடன் பயணம் செய்யும் நபர் நியூட்டன் இரண்டாம் விதியை பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில் அவ் நிலைமக்குறிப்பாயத்தில் இல்லை. நிலைமக்குறிப்பாயத்தில் இல்லை. நிலைமக்குறிப்பாயத்தில் உள்ள பொருள் தானாக முடுக்கமடையாது. தரையை பொருத்து $\overline{v}$ என்ற மாறாத்திசை வேகத்துடன் பயணம் செய்யும் நபர் நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தலாம் ஏனெனில் அவர் தரையைப் பொறுத்து நிலைமக் குறிப்பாயத்தில் பயணிக்கிறார்.

எடுத்துக்காட்டு.

துகளொன்றின் நிலை வெக்டர் $\overline{r} = 3t\hat{j} + 5t^2\hat{j} + 7\hat{k}$. எந்த திசையில் இந்த துகள் நிகர விசையை உணர்கிறது?

தீர்வு

துகளின் திசைவேகம் =

$$\dot{v} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t)\hat{i} + \frac{d}{dt}\left(5t^2\right)\hat{j} + \frac{d}{dt}(7)\hat{k}$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = 3\hat{i} + 10t\hat{j}$$

துகளின் முடுக்கம்

$$\dot{a} = \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{d^2\dot{r}}{dt^2} = 10\,\hat{j}$$

இங்கு, நேர்குறி y அச்சுத்திசையில் மட்டுமே துகள் முடுக்கமடையும். நியூட்டன் இரண்டாம் விதிப்படி நிகர விசையின் திசையும் நேர்குறி y அச்சின் திசையிலேயே அமையும். மேலும் இத்துகள் நேர்குறி x அச்சுத்திசையில் மாறாத் திசைவேகத்தைப் பெற்றுள்ளது. ஆனால் z அச்சுத்திசையில் எவ்வித திசைவேகத்தையும் பெறவில்லை. எனவே, x அல்லது z திசையில் எந்த நிகர விசையும் செயல்படவில்லை.

எடுத்துக்காட்டு.

நீட்சித்தன்மையற்ற மெல்லிய கயிறு ஒன்றில் கட்டி தொங்கவிடப்பட்ட ஊசல்குண்டு ஒன்றைக் கருதுக அதன் அலைவுகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

a) ஊசல் குண்டின் மீது செயல்படும் விசைகள் யாவை?
b) ஊசல் குண்டின் முடுக்கத்தினைக் காண்க

தீர்வு:

ஊசல் குண்டின் மீது பின்வரும் இரண்டு விசைகள் செயல்படுகின்றன அவை

i. கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் புவி ஈர்ப்பு விசை (mg)

ii. குண்டின் மீது நூல் செலுத்தும் இழுவிசை (T). இந்த இழுவிசையின் திசையை ஊசல்குண்டின் நிலை (Position) தீர்மானிக்கிறது. அது பின்வரும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஊசல்குண்டு ஒரு வட்டவில் பாதையில் இயங்குகிறது. எனவே இது ஒரு மைய நோக்கு முடுக்கத்தைப் பெறும். ஊசல் குண்டு A மற்றும் C புள்ளிகளில் கண நேர ஓய்வில் இருந்து, பின்னர் B புள்ளியை நோக்கிச் செல்லும்போது அதன் திசைவேகம் அதிகரிக்கும். எனவே, ஊசல்குண்டு வட்டவில்பாதையில் ஒரு தொடு கோட்டு முடுக்கத்தைப் பெறும். கீழே உள்ள படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு புவியீர்ப்பு விசையை ($mg\ \cos\theta, mg\ \sin\theta$) என இருகூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு.

தளம் ஒன்றில் இயங்கும் துகளின் திசைவேகம் பின்வரும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. துகள் மீது செயல்படும் விசையின் திசையைக் காண்க.

தீர்வு:

துகளின் திசைவேகம் $\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z k.$ படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது போன்று துகள் xy தளத்தில் இயங்குகிறது. z அச்சில் எவ்வித இயக்கமும் இல்லை. எனவே $v_z = 0$

திசைவேகத்தின் x கூறு v_x மற்றும் y கூறு v_y என்க. t=0 வினாடியிலிருந்து t=3 வினாடிவரை உள்ள நேர இடைவெளியில் y அச்சுத்திசையில் வெக்டரின் நீளம் அதிகரிப்பதைக் காணலாம். எனவே y அச்சுத்திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு (v_y) நேரத்தைப் பொருத்து

அதிகரிக்கிறது. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி y அச்சத்திசையில் துகள் ஒரு முடுக்கத்தினைப் பெறும். எனவே y அச்சுத்திசையில் துகளின் மீது ஒரு விசை செயல்படும். x அச்சுத்திசையில் வெக்டரின் நீளம் மாறாமதிப்பினைப் பெற்றுள்ளது. இதன்மூலம் துகள் x அச்சில்மாறாத்திசைவேகத்துடன் இயங்குவதைக் காட்டுகிறது. எனவே x அச்சில் நிகர விசை சுழியாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக:

புவிப்பரப்பில் ஓய்வு நிலையிலுள்ள பொருள் ஒன்றுக்கு நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியினைப் பயன்படுத்தி அதன் மூலம் பெறப்படும் முடிவுகளை ஆராய்க.

தீர்வு:

நிலைமக்குறிப்பாயமாகக் கருதப்படும் புவியைப் பொருத்து பொருளொன்று ஓய்வு நிலையில் உள்ளது என்க. அப்பொருளின் மீது பின்வரும் இரண்டு விசைகள் செயல்படுகின்றன அவை,

i. எதிர்க்குறி y அச்சுதிசையில் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (mg)
ii. நேர்க்குறி y அச்சுதிசையில் செயல்படும் புவிப்பரப்பு பொருளின் மீது செலுத்தும் மேல் நோக்கிய செங்குத்துவிசை (N). பொருளின் விசைப்படம் பின்வருமாறு.

$$\overrightarrow{F_g} = -mg\hat{j}$$

$$\overline{N} = N\hat{j}$$

தொகுபயன் விசை $\overrightarrow{F}_{net}$ =- $mg\hat{j}$ + $N\hat{j}$ பஆனால், பொருள் எவ்வித முடுக்கத்தையும் பெறவில்லை எனவே $\bar{a}$ =0.

நியூட்டன் இரண்டாம் விதிப்படி

$(\overrightarrow{F}_{net} = m\bar{a})$

இருபுறமும் சமன்பாட்டின் கூறுகளை ஒப்பிடும்போது

$(-mg$ +N) $\hat{j}$ =0
$-mg$ +N-0
N= mg

மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து நாம் அறிவது என்னவெனில், பொருள் ஓய்வு விசையின் எண்மதிப்பும் புவியீர்ப்பு விசையின் எண்மதிப்பும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு.

2kg நிறையுடைய பொருளின்மீது பின்வரும் இரண்டு விசைகள் செயல்படுகின்றன. $\overrightarrow{F}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 7\hat{k}$ மற்றும் $\dot{F}_2$=3$\hat{i}$ -4 $\hat{j}$ +3$\hat{k}$. பொருளின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

தீர்பு:

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, $\overrightarrow{F}_{net} = m\bar{a}$
இங்கு $\overrightarrow{F}_{net} \doteq \overrightarrow{F}_1 + \dot{F}_2$.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் படி $\dot{a} = \frac{\acute{F}_{net}}{m}$

$$\acute{F}_{net} = (5+3)\hat{i} + (8-4)\hat{j} + (7+3)\hat{k}$$

$$\acute{F}_{net} 8\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\dot{a} = \left(\frac{8}{2}\right)\hat{i} + \left(\frac{4}{2}\right)\hat{j} + \left(\frac{10}{2}\right)\hat{k}$$

$$\dot{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

எடுத்துக்காட்டு:

படத்தில் காட்டியுள்ள A,B மற்றும் C என்ற கனச் செவ்வகத்துண்டுகளின் மீது செயல்படும் விசைகளை காண்க.

கனச்செவ்வகத்துண்டு A யின் மீது செயல்படும் விசைகள்:

i. புவி ஏற்படுத்தும் கீழ்நோக்கிய ஈர்ப்பு விசை ($m_A g$)

ii. பொருள் B ஏற்படுத்தும் மேல் நோக்கிய செங்குத்து எதிர்விசை (N_B)
A யின் “தனித்த பொருளின் விசைப் படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

பொருள் B மீதான விசைகள்:

i) கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை ($m_B g$)
ii) கனச்செவ்வகத் துண்டு A ஏற்படுத்தும் கீழ்நோக்கிய விசை (N_A)
iii) கனச்செவ்வகத் துண்டு C ஏற்படுத்தும் மேல்நோக்கிய விசை (N_C)

Bன் மீது செயல்படும் விசை

கனச்செவ்வகத் துண்டு C இன் மீது செயல்படும் விசை:

i) கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை ($m_C g$)

ii. கனச்செவ்வகத் துண்டு B ஏற்படுத்தும் கீழ்நோக்கிய விசை (N_B)

iii. மேசை ஏற்படுத்தும் மேல்நோக்கிய செங்குத்து விசை (N_{table})

C ன் மீது செயல்படும் விசை

எடுத்துக்காட்டு:

வண்டியில் கட்டப்பட்ட குதிரை ஒன்றைக் கருதுக. தோடக்கத்தில் அக்குதிரை ஓய்வு நிலையில் உள்ளது. குதிரை முன் நோக்கி நடக்கத் தொடங்கும்போது, வண்டி முன்நோக்கி ஒரு முடுக்கத்தைப்பெறும். F_h என்ற விசையுடன் குதிரை, வண்டியை முன்நோக்கி இழுக்கும். அதேநேரத்தில் நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி வண்டியும், அதற்கு சமமான எதிர்திசையில் செயல்படும் ($F_c = F_h$) என்ற விசையுடன் குதிரையைப் பின்னோக்கி இழுக்கும். எனவே குதிரை மற்றும் வண்டி என்ற தொகுப்பின் விசை சுழியாக இருப்பினும் ஏன் குதிரை மற்றும் வண்டி முடுக்கமடைந்து முன்னோக்கி செல்கின்றன?

தீர்வு:

இம்முரண் கூற்றுக்குக் காரணம் நியூட்டனின் இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் விதிகளை தவறாக பயன்படுத்துவதற்கு முன் அமைப்பின் (System) தீர்மானிக்க வேண்டும்.

இவ்வாறு அமைப்பினைக் கண்டறிந்த பின்னர் அவ்வமைப்பின் மீது செயல்படும் அனைத்து விசைகளையும் எளிதாகக் கண்டறியலாம். இங்கு அமைப்பு ஏற்படுத்தும் விசைகளைக் கருதக் கூடாது என்பதை நினைவில் கொள்ளவும். அமைப்பின் மீது ஏதேனும் சமன் செய்யப்படாத விசைகள் செயல்பட்டால், அமைப்பு தொகுபயன் விசையின் திசையில்முடுக்கமடையும். பின்வரும் கருத்துக்களை வரிசைப்படி பின்பற்றி குதிரை மற்றும் வண்டியின் இயக்கத்தைப் பகுப்பாய்வு செய்யலாம்.

குதிரை மற்றும் வண்டி இவை இரண்டையும் ஒன்றாக ஒரு அமைப்பு (ளலளவநஅ) என்று கருதினால் குதிரை, வண்டியின் மீது செலுத்தும் எதிர்விசையையும் கருதக் கூடாது. மாறாக இந்த இரு விசைகளையும் அகவிசைகளாகக் கருத வேண்டும். மேலும் நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி அகவிசைகளின் தொகுப்பயன் சுழி. ஆவை அமைப்பினை முடுக்கமடையச் செய்யாது. மீது ஏற்படும் முடுக்கம் புறவிசையால் மட்டுமே ஏற்படும். நாம் கருதும் இந்நிகழ்வில், சாலையானது அமைப்பின் மீது செலுத்தும் விசை புறவிசையாகும். ஆமைப்பின் மீது செயல்படும் அனைத்து விசைகளையும் கருதாமல் குதிரை மற்றும் வண்டியின் தொகுபயன் விசை சுழி என்று கருதுவது தவறாகும். சாலையானது, வண்டி – குதிரை அமைப்பை முன்னோக்கித் தள்ளுகிறது. வெளிப்புற விசை ஒன்று அமைப்பின் மீது செயல்படும் போது நியூட்டனின் மூன்றாம் விதியைப் பயன்படுத்தாமல் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பின்வரும் படம் இதனை விளக்குகிறது.

குதிரையை அமைப்பு என்று கருதினால், அதன்மீது பின்வரும் மூன்று விசைகள் செயல்படுகின்றன.

i) கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (m_n g)
ii) சாலை, குதிரையின் மீது செலுத்தும் விசை (F_r)
iii) வண்டி, குதிரையின் மீது செலுத்தும் பின்னோக்கிய விசை (F_c)

இவை பின்வரும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. குதிரையின் மீது செயல்படும் விசைகள்

இயக்க விதிகள் (Lawa of motion)

F_r – சாலை குதிரையின் மீது செலுத்தும் விசை
F_c – வண்டி குதிரையின் மீது செலுத்தும் விசை
$F_r^{\perp}$ - விசை F_r இன் செங்குத்துக் கூறு = N
F_r - விசை F_r இன் கிடைத்தளக் கூறு. (இதுவே முன்னோக்கிய இயக்கத்திற்கும் காரணம்)

சாலை, குதிரையின் மீது செலுத்தும் விசையை, கிடைத்தளக்கூறு மற்றும் செங்குத்துக் கூறு என இரண்டாகப்பிரிக்கலாம். செங்குத்துக்கூறு கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையை சமன் செய்கிறது. முன்னோக்கிய திசையில் செயல்படும் கிடைத்தளக் கூறு பின்னோக்கிய விசை (Fc) ஐ விட அதிகம். எனவே முன்னோக்கியத் திசையில் ஒரு தொகுபயன் விசை செயல்பட்டு குதிரையை முன்னோக்கி இயக்குகிறது.

வண்டியை அமைப்பாகக் கருதினால், அதன்மீது பின்வரும் மூன்று விசைகள் செயல்படுகின்றன.
i) கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை ($m_c g$)
ii) சாலை, வண்டியின் மீது செலுத்தும் விசை (F_r)
iii) குதிரை, வண்டியின் மீது செலுத்தும் விசை (F_h)

இது பின்வரும் படத்தில் குறிப்பிட்ட காட்டப்பட்டுள்ளது.

சாலை வண்டியின் மீது செலுத்தும் விசையை $(\overline{F}_r)$ இரண்டு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். செங்குத்துக் கூறு, கீழ்நோக்கியீர்பு விசையை $(m_c g)$ சமன் செய்யும். கிடைத்தளக்கூறு பின்னோக்கிச் செயல்படும். மேலும் குதிரை, வண்டியின் மீது செலுத்தும் விசை $(\overline{F}_r)$ முன்னோக்கிச் செயல்படும்.

இது பின்னோக்கிச் செயல்படும் கிடைத்தளக் கூறைவிட அதிகம். எனவே. முன்நோக்கியத் திசையில் ஒரு தொகுபயன் விசை கிடைக்கும். இதன் காரணமாக வண்டி முன்னோக்கி முடுக்கமடையும்.

குதிரை மற்றும் வண்டி இரண்டையும் ஒரு அமைப்பாகக் கருதினால், இவ்வமைப்பின் மீது இரண்டு விசைகள் செயல்படும். அவை பின்வருமாறு

i. கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை $(m_h + m_c)g$
ii. சாலை, அமைப்பின் மீது செலுத்தும் விசை (F_r)
இவை, பின்வரும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

iii. இந்நிகழ்வில், சாலை அமைப்பின் மீது ஏற்படுத்தும் விசையை (F_r) இரு கூறுகளாகப்பிரிக்கலாம்.

iv. சாலை, அமைப்பின் மீது செலுத்தும் விசையின் சமன் செய்யப்படாத கிடைத்தளக்கூறு, குதிரை மற்றும் வண்டி அமைப்பு முன்னோக்கிச் செல்வதற்கு காரணமாக அமைகிறது.

செங்குத்துக்கூறு புவியீாப்பு விசை $(m_h + m_c)g$ யை சமன் செய்யும்
எடுத்துக்காட்டு:

$y = ut - \frac{1}{2}gt$ என்ற சமன்பாடு துகள் ஒன்றின் நிலையைக் குறிக்கிறது.

a. அத்துகளின் மீது செயல்படும் விசை மற்றும்
b. அத்துகளின் உந்தத்தைக் காண்க

தீர்வு

துகளின் மீது செயல்படும் விசையைக் காண அத்துகள் அடையும் முடுக்கத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.

எனவே முடுக்கம் $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ (அல்லது) $a = \frac{dv}{dt}$
இங்கு

v என்பது y-அச்சில் துகளின் திசைவேகம்

$$v = \frac{dy}{dt} = u - gt$$

துகளின் உந்தம் = mv = m(u-gt)

$$a = \frac{dv}{dt} = -g$$
$$F = ma = -mg$$

விசை, எதிர்குறி y அச்சுத்திசையில் செயல்படுவதை எதிர்கறி காட்டுகிறது. மேலும் இதே விசைதான் எறிபொருள் ஒன்றின் மீது செயல்படும் விசையாகும்.

சாய்தளத்தில் இயங்கும் பொருளின் இயக்கம்:

m நிறையுடைய பொருள் ஒன்று, சாய் கோணம் கொண்ட உராய்வற்ற சாய்தளம் ஒன்றில் காட்டியுள்ளவாறு சறுக்கிச் செல்கிறது என்க. அப்பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகள் பின்வருவனவற்றைத் தீர்மானிக்கின்றன.

a. பொருளின் முடுக்கம்
b. பொருள் தரையை அடையும்போது அதன் வேகம்

பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகள்

i. கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (mg)
ii. சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகப் பொருளின்மீது செயல்படும் செங்குத்து விசை (N)

சாய்தளத்தில் இயங்கும் பொருள்

பொருளின் தனிப் பொருள் விசைப்படம் வரைய, அப்பொருள் ஒரு புள்ளிநிறையாகக் கருத வேண்டும்.

படம் a இல் காட்டியுள்ளபடி இயக்கம் சாய்தளத்தில் நடைபெறுவதால் படம் b இல் காட்டியவாறு சாய்தளத்திற்கு இணையாக உள்ள ஒரு ஆய அச்சு அமைப்பினை தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

புவியீர்ப்பு விசை mg ஐ இரண்டு கூறுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும்

mg sin θ கூறு சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும்,
mg cos θ கூறு சாய்தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் உள்நோக்கிய செயல்படுகின்றன.

புவியீர்ப்பு விசை (mg) சாய்தளத்தின் கீழ்நோக்கிய செங்குத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம், படம் (c) இல் காட்டப்பட்டுள்ள சாய் கோணம் (θ) விற்குச் சமம்.

y அச்சுத்திசையில் எவ்விதமான இயக்கமும் முடுக்கமும் இல்லை

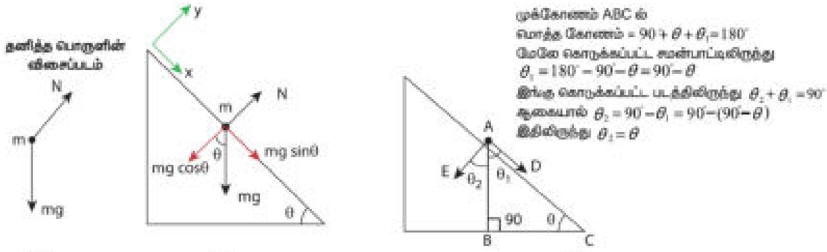
y அச்சுத்திசையில் நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தினால்

$$-mg\cos\theta\hat{j} + N\hat{j} = 0 \text{ (முடுக்கம் இல்லை)}$$

சமன்பாட்டின் இருபுறமும் உள்ள கூறுகளை ஒப்பிடும் போது N-mg cos θ =0

$$N = mg\cos\theta$$

சாய்தளப்பரப்பு ஏற்படுத்தும் செங்குத்து விசையின் (N) எண்மதிப்பு mg cos θ விறகுச் சமம்.



(a) (b) (c)

(a) தனிப்பொருள் விசைப்படம் (b) mg ன் கிடைத்தள மற்றும் செங்குத்துக் கூறுகள்
(c) கோணம $\theta_2 \theta$ க்குச் சமம்.

பொருள் x அச்சுத்திசையில் a முடுக்கத்துடன் சறுக்கிச் செல்கிறது. எனவே x அச்சுத்திசையில் நியுட்டன் இரண்டாம விதியை பயன்படுத்தினால்

$$mg\sin\theta\hat{i} = ma\hat{i}$$

இருபுறமும் கூறுகளை ஒப்பிடும்போது

$$mg\sin\theta = ma$$

சறுக்கும் பொருளின் முடுக்கம்

$$a = g\sin\theta$$

இங்கு பொருளின் முடுக்கம், சாய்கோணம் θ வைச் சார்ந்தது என்பதை கவனிக்க வேண்டும். சாய்கோணம் $\theta = 90^\circ$ எனில் பொருள் (a = g) என்ற முடுக்கத்துடன் செங்கத்தாக கீழ்நோக்கி வரும். பொருள் தரையை அடையும் போது அதன் வேகத்தை நியூட்டனின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் கொண்டு அறியலாம். இயக்கம் முழுமைக்கும் முடுக்கம் ஒரு மாறிலி ஆகும்.
$V^2 = u^2 + 2as$ (x அச்சுத் திசையில்)

முடுக்கம் a = gsin θ க்குச். பொருள் ஓய்வு நிலையிலிருந்து நகரத்துவங்கும்போது ஆரம்பத் திசைவேகம் u சுழியாகும். மேலும் சாய்தளத்தின் நீளம் இங்கு s ஆகம்.

சமன்பாடு (3.3) லிருந்து தரையை அடையும் போது பொருளின் வேகம் (v)

சமதளப்பரப்பில் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் இரண்டு பொருட்கள்:

m_1 மற்றும் m_2 நிறை கொண்ட இரண்டு கனச் செவ்வகத்துண்டுகளைக் கருதுக ($m_1 > m_2$) அவை இரண்டும் உராய்வற்ற, வழுவழுப்பான சமதளப்பரப்பில் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக்கொண்டு உள்ளன.

F என்ற கிடைத்தள விசையைக் செலுத்தும்போது இவ்விரண்டு துண்டுகளும் a என்ற முடுக்கத்துடன் விசையின் திசையிலேயே இயங்குகின்றன.
(a) m_1 மற்றும் m_2 நிறை கொண்ட ($m_1 > m_2$) கனச் செவ்வகத்துண்டுகளைக் உராய்வற்ற, வழுவழுப்பான சமதளப்பரப்பில் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக் கொண்டுள்ளன.

முடுக்கம் $\bar{a}$ ஐ கண்டறிய நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்த வேண்டும்
(கூட்டு நிறை $m = m_1 + m_2$)

$$\vec{F} = m\bar{a}$$

இரு நிறைகள் கொண்ட இவ்வமைப்பு நேர்க்குறி ஒ அச்சு திசையில் இயங்கினால் சமன்பாட்டின் வெக்டர் கூறு வடிவில் எழுதலாம். $\vec{F} = m\bar{a}$ என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களிலும் வெக்டர் கூறுகளை ஒப்பிட F=ma என கிடைக்கும்

இங்கு $m = m_1 + m_2$ ஆகும்.

அமைப்பின் முடுக்கம் $\therefore a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$

நிறை m_1 தனது இயக்கத்தின் காரணமாக, நிறை m_2 வின் மீது செலுத்தும் விசை தொடு விசை (contact force) ($\dot{f}_{21}$) எனப்படும். நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி, நிறை m_2 நிறை m_1 மீது இதற்குச் சமமான எதிர்திசையில் அமைந்து ஒரு எதிர்விசையை ($\dot{f}_{21}$) செலுத்தும்.

m_1 நிறைக்கான விசைப்படம் (b) ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$F\hat{i} - f_{12} = m_1 a\hat{i}$$

(b) m_1 நிறையின் விசைப்படம்
சமன்பாட்டின் இருபுறமும் கூறுகளை ஒப்பிடும்போது

$$F - f_{12} = m_1 a$$
$$f_{12} = F - m_1 a$$

சமன்பாடு (3.5) ஐ (3.6)ல் பிரதியிட

$$f_{12} = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right)$$
$$f_{12} = F\left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$
$$f_{12} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

சமன்பாடு (3.7) லிருந்து f_{12} வின் எண்மதிப்பு எதிர்விசையை ஏற்படுத்தும் நிறை m_1 வை சார்ந்திருப்பதை அறியலாம். இங்கு விசை எதிர்குறி x – அச்சுத்திசையில் செயல்படுவதை நினைவில் கொள்ளவும். m_1 மீது செயல்படும் எதிர்விசை வெக்டர்

குறியீட்டின் படி $\dot{f}_{12} = -\frac{Fm_2}{m_1 + m_2}\hat{i}$

நிறை m_2 வைப் பொருத்தவரை x அச்சுத்திசையில் அதன்மீது m_1 நிறை ஏற்படுத்தும் ஒரே ஒரு விசை மட்டுமே கிடைத்தளத்திசையில் செயல்படுகிறது. 3.14 (c)ல் நிறை m_2 வின் விசைப்படம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

நிறை m_2 விற்கு நியூட்டன் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தினால் $f_{21}\hat{i} = m_2 a\hat{i}$

சமன்பாட்டின் இருபுறமும் கூறுகளை ஒப்பிடும்போது $f_{21} = m_2 a$

(c) நறை m_2 வின் தனித்த பொருளின் விசைப்படம் (F B D)

சமன்பாடு (3.5)லிருந்து முடுக்கத்தினை (3.8) ல்

பிரதியிடும்போது $f_{21} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$

எனவே, தொடுவிசையின் எண் மதிப்பு

$$f_{21} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

இது நேர்க்குறி ஒ அச்சுத்திசையில் செயல்படும் வெக்டர் குறியீட்டின்படி நிறை m_1, நிறை m_2 மீது செலுத்தும் விசை $\dot{f}_{21} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}\hat{i}$

இங்கு $\dot{f}_{12} = - \dot{f}_{21}$ என்பதைக் கவனிக்க. இது நியூட்டனின் மூன்றாம் விதியை உறுதிப்படுத்துகிறது.

ஒன்றுடன் ஒன்று பிணைக்கப்பட்ட பொருட்களின் இயக்கம்

நீட்சித் தன்மையற்ற மெல்லிய கயிறு ஒன்றில் பிணைக்கப்பட்ட பொருட்களின் மீது, செங்குத்து அல்லது கிடைத்தளமாக அல்லது சாய்தளத்தில் விசை F ஒன்றை செலுத்தும் போது, அது மெல்லிய கயிற்றில் ஒரு இழு விசையை ஏற்படுத்தும், இதன் விளைவாக முடுக்கத்தில் ஒரு குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் ஏற்படும். இந்நிகழ்வினை வெவ்வேறு கோணங்களில் பகுப்பாய்வு செய்யலாம்.

நேர்வு 1: செங்குத்து இயக்கம்

m_1 மற்றும் m_2 நிறை கொண்ட இரண்டு கனச்செவ்வகத் துண்டுகள் ($m_1 > m_2$) ஒரு மெல்லிய நீட்சித்தன்மையற்ற கயிறு ஒன்றில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இது கப்பி ஒன்றின் வழியே படம் 3.15ல் காட்டியுள்ளவாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளது.

கப்பி ஒன்றில் பிணைக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு கனச்செவ்வகத் துண்டுகள்

கயிற்றின் இழுவிசை T மற்றும் முடுக்கம் a என்க. அமைப்பினை விடுவிக்கும்போது, இரண்டு நிறைகளம் இயங்கத்துவங்கும். m_2 செங்குத்தாக மேல்நோக்கியும் மற்றும் m_1 செங்குத்தாக கீழ்நோக்கியும் a என்ற சம முடுக்கத்துடன் இயங்கும். m_1 மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை m_1g, m_2 நிறையை மேல்நோக்கிய உயர்த்த பயன்படுகிறது. மேல்நோக்கிய திசையை y அச்சு எனக்கருதுக படம் 3.16 ல் இரு நிறைகளுக்கான விசைப்படம் காட்டப்பட்டுள்ளது.
m_1 மற்றும் m_2 நிறைகிளன் தனித்த பொருளின் விசை படம் (free body diagram)

$$T\hat{j} - m_2 g\hat{j} = m_2 a\hat{j}$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் இடது கை பக்கம் நிறை மீது செயல்படும் மொத்த விசையும், வலது கை பக்கம் நிறை மற்றும் y அச்சுத்திசையில் அது அடையும் முடுக்கம் இவற்றின் பெருக்கற்பலனும் அடையும் முடுக்கம் இவற்றின் பெருக்கற்பலனும் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இருபுறக் கூறுகயையும் ஒப்பிட கீழ்கண்ட சமன்பாடு கிடைக்கும்,

$$T - m_2 g = m_2 a$$

இதே போன்ற அ1 நிறைக்கும் நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்டுத்தும்போது பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$$T\hat{j} - m_1 g\hat{j} = m_1 a\hat{j}$$

நிறை அ1 கீழ்நோக்கிய இயங்குவதால் (- $\hat{j}$) அதன் முடுக்கமும் கீழ்நோக்கிச் (- $\hat{j}$) செயல்படும். இருபுறமும் கூறுகளையும் ஒப்பிட

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$m_1 g - T = m_1 a$$

சமன்பபாடு (3.9) மற்றும் (3.10), யைக் கூட்டுக.

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$
$$\left(m_1 - m_2\right) g = \left(m_1 + m_2\right) a$$

சமன்பாடு (3.11), லிருந்து, இரண்டு நிறைகளின் மீதான முடுக்கம்

$$a = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] g$$

இரண்டு நிறைகளும் சமமாக இருந்தால் ($m_1 = m_2$) இமைப்பு சுழி முடுக்கத்தைப் பெற்று ஓய்வு நிலையில் இருக்கும் என்பதை இது காட்டுகிறது.

கயிற்றின் மீது செயல்படும் இழுவிசையைக் காண சமன்பாடு (3.12) இல் உள்ள முடுக்கத்தை, சமன்பாடு (3.9) இல் பிரதியிட வேண்டும்.

$$T - m_2 g = m_2 \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$T = m_2 g + m_2 \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] g$$

சமன்பாடு (3.13)இன் வலப்பக்கமுள்ள $m_2 g$ ஐ பொதுவாக வெளியே எடுக்கும்போது

$$T = m_2 g \left[1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right]$$
$$T = m_2 g \left[\frac{m_1 + m_2 + m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right]$$
$$T = \left[\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right] g$$

சமன்பாடு (3.12) முடுக்கத்தின் எண் மதிப்பை மட்டுமே கொடுக்கும்.

நிறை m_1, ன் முடுக்க வெக்டர் பின்வருமாறு

$\dot{a} = -\left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] \hat{j}$. அதே போல நிறை m_2 இன் முடுக்கவெக்டர் பின்வருமாறு $\dot{a} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] \hat{j}$

நேர்வு 2: கிடைத்தள இயக்கம்

இவ்வகை இயக்கத்தில் நிறை m_2 மேசை ஒன்றின் கிடைத்தளப்பரப்பிலும், m_1 கப்பி ஒன்றின் வழியே படம் 3.17 இல் உள்ளவாறு தொங்கவிடப்படுள்ளன. இங்கு பரப்பின் மீது எவ்வித உராய்வு இல்லை எனக் கருதுக.

கனச் செவ்வகத் துண்டுகளின் கிடைத்தள இயக்கம்

நீட்சித்தன்மையற்ற மெல்லிய கயிற்றில் கட்டப்பட்ட இரண்டு நிறைகளில், m_1 நிறை a முடுக்கத்துடன் கீழ்நோக்கியும், அதே முடுக்கத்துடன் m_2 நிறை கிடைத்தளத்திலும் இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறன எனக்கருதுக.

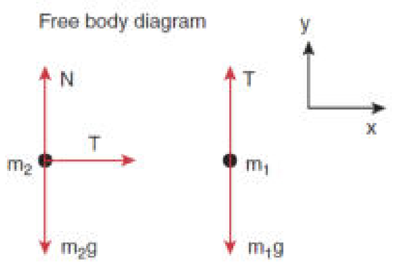
m_2 நிறையின் மீது செயல்படும் விசைகள் பின்வருமாறு

i. கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (m_2g)
ii. மேசைப்பரப்பு ஏற்படுத்தும் மேல்நோக்கிய செங்குத்து விசை (N)
iii. மெல்லிய கயிறு ஏற்படுத்தும் கிடைத்தள இழுவிசை (T)

இதேபோன்று, m_1 நிறையின் மீது செயல்படும் விசைகள் பின்வருமாறு

i. கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (m_1g)
ii. மெல்லிய கயிறு ஏற்படுத்தும் மேல்நோக்கிச் செயல்படும் இடுவிசை (T)

பின்வரம் படம் 3.18 இரண்டு நிறைகளின் விசைப்படத்தைக் காட்டுகிறது.



நிறைகள் m_1 மற்றும் m_2 வின் விசைப்படம்

m_1 நிறைக்கு நியூட்டன் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தினால்

$$T\hat{j} - m_1 g\hat{j} = -m_1 a\hat{j}$$ (y அச்சுத் திசையில்)

இருபுறமும் கூறுகளை ஒப்பிட

$$T - m_1 g = -m_1 a$$

m_2 நிறைக்கு நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்துக

$$T\hat{i} = m_2 a\hat{i}$$ (x அச்சு திசையில்)

இருபுறமும் கூறுகளை ஒப்பிட

$$T = m_2 a$$

Y அச்சு திசையில் நிறைக்கு எவ்வித முடுக்கமும் இல்லை

$$N\hat{j} - m_2 g\hat{j} = 0$$

இருபுறமும் கூறுகளை ஒப்பிட

$$N - m_2 g = 0$$
$$N = m_2 g$$

சமன்பாடு (3.15) ஐ சமன்பாடு (3.14) ல் பிரதியிட்டால் முடுக்கம் a கிடைக்கும்.

$$m_2 a - m_1 g = -m_1 a$$
$$m_2 a + m_1 a = m_1 g$$
$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

கயிற்றின் இழுவிசைக்கான சமன்பாட்டைப் பெறலாம், சமன்பாடு (3.17) ஐ (3.15) ல் பிரதியிடுவதன் மூலம் பெறலாம்.

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

இரண்டு நேர்வுகளிலும் உள்ள இயக்கங்களை ஒப்பிடும்போது, கிடைத்தள இயக்கத்திலுள்ள கயிற்றின் இழுவிசையானது, செங்குத்து இயக்கத்திலுள்ள கயிற்றின் இழுவிசையில் பாதியளவே உள்கை அறியலாம்.

இம்முடிவு தொழில் துறையில் முக்கியப் பங்காற்றுகிறது. கிடைத்தள இயக்கத்திலுள்ள இயங்கு பட்டையில் (conveyor belt) பயன்படும் கயிறுகள் செங்குத்து இயக்கத்திலுள்ள மின்உயர்த்தி (lift) மற்றும் எடைத்தூக்கி (crane) இவற்றில் பயன்படும் கயிறுகளைவிட நீண்ட ஆயுளைப் பெற்றிருக்கும்.

ஒருமைய விசைகள் மற்றும் லாமியின் தேற்றம்:

பல்வேறு விசைகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்குமானால், அவ்விசைகளை ஒருமைய விசைகள் என்று அழைக்கலாம். படம் 3.19 ஒருமைய விசைகளைக் காட்டுகிறது. ஒருமைய விசைகள், ஒரே தளத்தில் அமைய வேண்டிய அவசியமில்லை. மாறாக அவை ஒரேதளத்தில் அமைந்தால் அவ்விசைகளை ஒருமைய மற்றும் ஒருதள விசைகள் என்று அழைக்கலாம்.

ஒருமைய விசைகள்

லாமியின் தேற்றம் (Lami's theorem)

லாமி தேற்றத்தின்படி, சமநிலையில் இருக்கும் மூன்று ஒருதள மற்றும் ஒருமைய விசைகள் கொண்ட அமைப்பில், ஒவ்வொரு விசையின் எண் மதிப்பும், மற்ற இரண்டு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மதிப்பிற்கு நேர்த்தகவில் இருக்கும். இம்மூன்று விசைகளுக்கான தகவுமாறிலி சமமாகும்.

படம் 3.20 வில் காட்டியுள்ளபடி $\dot{F}_1, \dot{F}_2$ மற்றும் $\overline{F}_3$ என்ற மூன்று ஒரு தள மற்றும் ஒரு மைய விசைகள் o என்ற புள்ளியில் செயல்பட்டு அப்புள்ளியை சமநிலையில் வைக்கின்றன என்க. லாமியின் தேற்றப்படி

O என்ற புள்ளியில் செயல்படும் $\dot{F}_1, \dot{F}_2$ மற்றும் $\overline{F}_3$ என்ற மூன்று ஒரு தள மற்றும் ஒருமைய விசைகள்

$$\left|\vec{F_1}\right| \propto \sin\alpha$$

$$\left|\vec{F_2}\right| \propto \sin\beta$$

$$\left|\vec{F_3}\right| \propto \sin\gamma$$

எனவே, $\dfrac{\left|\vec{F_1}\right|}{\sin\alpha} = \dfrac{\left[\vec{F_2}\right]}{\sin\beta} = \dfrac{\left[\vec{F_3}\right]}{\sin\gamma}$

விசைகள் செயல்பட்டு, ஓய்வுச் சமநிலையில் உள்ள பொருள்களை பகுப்பாய்வு செய்வரில், லாமியின் தேற்றம் மிக முக்கியமாகப் பயன்படுகிறது.

லாமி தோற்றத்தின் பயன்பாடு:

எடுத்துக்காட்டு.

ஒத்த இரண்டு சங்கிலிகளால் செய்யப்பட்ட ஓய்வு நிலையில் உள்ள ஒரு ஊஞ்சல் ஒன்றில் குழந்தை ஒன்று அமர்ந்திருக்கிறது. அக்குழந்தையின் மீது செயல்படும் விசைகளைக் காண்க. மேலும் லாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி சங்கிலியின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

ஊஞ்சலில் அமர்ந்திருக்கும் குழந்தையை, நிறை ஒன்று நீட்சித்தன்மையற்ற மெல்லிய இரண்டு கயிறுகளால் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்ட அமைப்பாகக் கருதலாம். குழந்தையின் மீது இரண்டு விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை

i. எதிர்குறி y அச்சுத் திசையில் செயல்படும் கீழ்நோக்கிய புவியீர்ப்பு விசை (mg)
ii. இரண்டு கயிறுகளின் வழியே செயல்படும் இழுவிசைகள் (T)

இவ்விரண்டு விசைகளும் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி ஒருதள மற்றும் ஒருமைய விசைகளாகும்.

லாமி தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{T}{\sin(180-\theta)} = \frac{T}{\sin(180-\theta)} = \frac{mg}{\sin(2\theta)}$$

இங்கு $\sin(180-\theta) = \sin\theta$ மற்றும் $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

எனவே, $\dfrac{T}{\sin\theta} = \dfrac{mg}{2\sin\theta\cos\theta}$

இதிலிருந்து ஒவ்வொரு கயிற்றின் இழுவிசை (T)

பின்வருமாறு காணப்படும் $T = \dfrac{mg}{2\cos\theta}$

மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்த மாறா விதி

மாறா விதிகள் (conservation laws) இயற்கையில் ஒரு முக்கியமான அங்கத்தை விகிக்கிறது. மாறா விதிகளைப்பயன்படுத்தி இயங்கும் பொருட்களின் இயக்கங்களை சிறப்பாக பகுப்பாய்வு செய்ய இயலும். இயங்கியலில் அல்லது எந்திரவியலில் மூன்று மாறா விதிகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு

i. ஆற்றல் மாறா விதி (law of conservation of energy)
ii. மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்த மாறா விதி (law of conservation of total linear momentum) மற்றும் கோண உந்த மாறா விதி (law of conservation of angular momentum.)

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி மற்றும் மூன்றாம் விதிகளை ஒன்றிணைத்து, மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்த மாறா விதியைப் பெறலாம்.

இரண்டு துகள்கள், ஒன்றோடொன்று தொடர்பு கொள்ளும் போது, ஒரு துகள் செயல் எதிர்செயல் புரியும்போது ஒவ்வொரு துகளும் மற்ற துகளின் மீது $\vec{F}_{21}$ என்ற விசையை செலுத்தினால், அதே நேரத்தில் இரண்டாவது துகள், முதல் துகளின்மீது $\vec{F}_{12}$ என்ற சமமான எதிர்விசையைச் செலுத்தும். எனவே நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி

$$\overline{F}_{21} = -\overline{F}_{12}$$

துகள்களின் உந்தங்கள் அடிப்படையில் ஒவ்வொரு துகள் மீதும் செயல்படும் விசையை நியூட்டன் இரண்டாம் விதியினைக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.

$$\dot{F}_{12} = \frac{d\dot{p}}{dt} \text{ மற்றும் } \dot{F}_{21} = \frac{d\dot{t}_2}{dt}$$

இங்கு $\vec{P}_1$ என்பது முதல் துகளின் உந்தம், அது இரண்டாம் துகள் செலுத்தும் $\vec{F}_{12}$ என்ற விசையினால் மாற்றமடைகிளது. அதே போல $\vec{P}_1$ என்பது இரண்டாம் துகளின் உந்தம். இவ்வுந்தமானது முதல் துகள் இரண்டாவது துகளின் மீத செலுத்தும் $\vec{F}_{21}$ என்ற விசையினால் மாற்றமடைகிறது.

(சமன்பாடு 3.21) சமன்பாடு (3.20) இல் பிரதியிடுக

$$\frac{d\dot{p}_1}{dt} = -\frac{d\dot{p}_2}{dt}$$

$$\frac{d\dot{p}_1}{dt} + \frac{d\dot{p}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{p}_1 + \dot{p}_2\right) = 0$$

இதிலிருந்து $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 =$ எப்பொழுதும் மாறா வெக்டர் என்பதை அறியலாம்.

இங்கு $\overline{P}_1 + \overline{P}_2$ என்பது இரண்டும் துகள்களின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தமாகும்.

$\dot{p}_{tot} = \dot{p}_1 + \dot{p}_2$ இதை அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் என்றும் அழைக்கலாம். இம்முடிவிலிருந்து மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்த மாறா விதியை பின்வருமாறு வரையறை செய்யலாம்.

அமைப்பின் மீது எவ்வித வெளிப்புற விசையும் செயல்படாத நிலையில், அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் எப்பொழுதும் ஒரு மாறா வெக்டராகும். வேறு வகையில் கூறுவோமாயின் அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் நேரத்தைப் பொருந்து மாறாது.

இங்கு $\vec{P}_1$ மற்றும் $\vec{P}_2$ வில் ஏதேனும் மாற்றம் ஏற்பட்டாலும் அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் $\vec{P}_1+\vec{P}_2$ மாறாது என்பதைப் புரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

$\vec{F}_{12}$ மற்றும் $\vec{F}_{21}$ விசைகளை அமைப்பின் அகவிசைகள் என்ற அழைக்கலாம். ஏனெனில் இவ்விசைகள் துகள்களுக்கிடையே மட்டும் செயல்படுகின்றன. துகளின் மீது எவ்வித வெளிப்புற விசையும் செயல்படாத நிலையில் அமைப்பின் விசையும் செயல்படாத நிலையில் அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் ஒரு மாறா வெக்டராகும்.

எடுத்துக்காட்டு.

கீழ்க்கண்ட அமைப்புகளில் செயல்படும் அக மற்றும் புற விசைகளை காண்க.

a. புவியை மட்டும் தனியாகக் கொண்ட அமைப்பு
b. புவி மற்றும் சூரியன் இணைந்த அமைப்பு
c. நடக்கும் மனிதன் - என்ற அமைப்பு
d. நமது உடல் மற்றும் புவி இணைந்த அமைப்பு

தீர்வு

a. புவி மட்டும் கொண்ட அமைப்பு

சூரியனின் ஈர்ப்பு விசையினால், புவி சூரியனைச் சுற்றிவருகிறது. புவியினைத் தனித்த அமைப்பு எனக்கருதினால், சூரியனின் ஈர்ப்பு விசையை புறவிசையாகக் கருதலாம். நிலவையும் நாம் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டால், நிலவும் புவியின் மீது ஒரு புறவிசையைச் செலுத்தும்.

டி. புவி மற்றும் சூரியன் இணைந்த அமைப்பு

இந்நேர்வில், மற்றும் சூரியன் இணைந்த அமைப்பு எதிர்ச்செயல் விசை சோடியாக செயல்படுகின்றன. ஒன்று சூரியன் புவியின் மீது செலுத்தும் ஈர்ப்பு விசை, மற்றொன்று புவி சூரியன் புவியின் மீது செலுத்தும் ஈர்ப்பு விசை, மற்றொன்று புவி சூரியனின் மீது செலுத்தும் ஈர்ப்புவிசை ஆகும்.

c. நடக்கும் மனிதன் - என்ற அமைப்பு

நடக்கும் போது, நாம் புவியின் மீது ஒரு விசையை செலுத்தும் அதே நேரத்தில் புவியும் இதற்குச்சமமான எதிர்விசை ஒன்றை நம்மீது செலுத்துகிறது. நமது உடலை மட்டும் ஒரு அமைப்பாகக் கருதினால் புவி நம்மீது செருத்தும் எதிர்விசையை புறவிசை எனக்கருதலாம்.

e. நமது உடல் மற்றும் புவி இணைந்த அமைப்பு

இந்நிகழ்வில், இரண்டு அக விசைகள் அமைப்பில் உள்ளன. ஒன்று நாம் புவியின் மீது செலுத்தும் விசை, மற்றொன்று புவி நம்மீது செலுத்தும் சமமான எதிர்விசை.

நமது உடல் மற்றும் புவி இணைந்த அமைப்பு

உந்த மாறா விதியின் பொருள்

1. உந்த மாறா விதி ஒரு வெக்டர் வதியாகும். இவ்விதி மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தத்தின் எண் மதிப்பு மற்றும் திசை மாறாதவை எனக்காட்டுகிறது. சில நேர்வுகளில் மொத் நேர்க்கோட்டு உந்தம் சுழி மதிப்பையும் பெறலாம்.

2. பொருளொன்றின் இயக்கத்தினைப் பகுப்பாய்வு செய்யும்போது நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி அல்லது நேர்க்கோட்டு உந்தமாறா விதியை நாம் பயன்படுத்தலாம். நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியைப் பயன்படுத்த வேண்டுமானால் நாம் பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகளைக் குறிப்பிட வேண்டும். நடைமுறைச் சூழலில் இது கடினமாகும். ஆனால் உந்த மாறா விதியில், இவ்வாறு

விசைகளைக் சுட்டிக்காட்ட வேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே உந்த மாறா விதி பயன்படுத்துவதற்கு எளிமையானது மற்றும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு பொருட்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதும் நிகழ்வில் அவ்விரண்டு பொருட்களும் ஒன்றின்மீது மற்றொன்று செலுத்தும் விசையைக் குறிப்பிடுவது சற்றே கடினமாகும். ஆனால் மோதலின்போது உந்த மாறா விதியை பயன்படுத்துவது எளிமையாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. துப்பாக்கி சுடும் நிகழ்வு ஒன்றைக் கருதுக. இங்கு துப்பாக்கி மற்றும் குண்டு இரண்டும் சேர்ந்தது ஒரு அமைப்பு ஆகும். தொடக்கத்தில் துப்பாக்கி மற்றும் குண்டு இரண்டும் ஓய்வு நிலையில் உள்ளன எனவே அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் சுழியாகும். $\vec{P}_1$ என்பது குண்டின் உந்தமாகவும், $\vec{P}_2$ என்பது துப்பாக்கியின் உந்தமாகவும் கருதுக. இங்கு இரண்டும் ஓய்வு நிலையில் உள்ளன

$$\overline{P}_1 = 0, \overline{P}_2 = 0.$$

சுடுவதற்கு முன் மொத் உந்தம் சுழி $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = 0$ நேர்க்கோட்டு உந்த அழிவின்மை விதிப்படி, துப்பாக்கி சுட்ட பின்பும் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் சுழி மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

துப்பாக்கி சுடப்படும்போது, துப்பாக்கி முன்னோக்கிய திசையில் ஒரு விசையை குண்டின் மீது செலுத்தும். எனவே குண்டின் உந்தம் $\vec{P}_1$ லிருந்து $\vec{P}_1$ க்கு மாற்றமடையும். நேர்க்கோடு உந்த மாறா விதியின் காரணமாக துப்பாக்கியின் உந்தமும் $\vec{P}_2$ விரிருந்து $\vec{P}_2$ மாற்றமடையும். உந்த மாறா விதிப்படி $\overline{P}_1' + \overline{P}_2' = 0$ இதிலிருந்து $\vec{P}_1' = -\vec{P}_2'$ என அறியலாம். எனவே துப்பாக்கியின் உந்தம் துப்பாக்கிக் குண்டின் உந்தத்திற்கு எதிர்திசையில் இருக்கும்.

இதன் காரணமாகத்தான் துப்பாக்கி சுடப்பட்டபின்பு, $\left(-\vec{P}_2\right)$ என்ற ஒரு உந்தத்துடன் பின்னோக்கி இயங்கும். இதற்கு 'பின்னியக்க உந்தம்' என்று பெயர். இந்த இயக்கம் உந்த மாறா விதிக்கு ஒரு எடுத்துக் காட்டு ஆகும்.

2. ஓய்வு நிலையிலுள்ள ஒரு பொருள், மற்றும் அதை நோக்கிய திசையில் இயங்கும் பொருள் ஆகிய இரண்டு பொருட்களைக் கருதுக. இவை இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதி, மோதலுக்குப்பின் தன்னிச்சையான திசையில் செல்கின்றன.

இந்நிகழ்வில், மோதலுக்கு முன்பு அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம், இயக்கத்திலுள்ள பொருட்களின் தொடக் நேர்க்கோட்டு உந்தத்திற்குச் சமமாகும். நேர்க்கோட்டு உந்த மாறா விதிப்படி, மோதலுக்கு பின்பும் அமைப்பின் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் முன்னோக்கிய திசையில் செயல்படும். பின்வரும் படம் இதனை விளக்குகிறது.

பிரிவு 4.4 இல் இம்மோதல் பற்றிய விரிவான கணக்கீடுகள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு பின்வரும் கருத்தைப் புரிந்து கொள்வது பயனுள்ளதாக இருக்கும். மோதலுக்கு முன்பும், பின்பும் மொத்த உந்த வெக்டர் ஒரே திசையில் உள்ளது. இது மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தம் மோதலுக்கு முன்பும் பின்பும் ஒரு மாறிலி வெக்டர் என்பதை எளிமையாக விளக்குகின்றது. மோதலின்போது ஒவ்வொரு பொருளும் மற்ற பொருளின் மீது ஒரு விசையைச் செலுத்தும். இவ்விரண்டு பொருட்களையும் ஒரு அமைப்பு எனக்கருதினால், இவ்விரண்டு விசைகளும் அகவிசைகளாகும். எனவே இந்த அகவிசைகள் மொத்த நேர்க்கோட்டு உந்தத்தை மாற்றாது.

கணத்தாக்கு:

மிக அதிக விசை, மிகச்குறுகிய நேரத்திற்கு ஒரு பொருளின் மீது செயல்பட்டால் அவ்விசையை கணத்தாக்கு விசை அல்லது கணத்தாக்கு என்று அழைக்கலாம்.

F என்ற விசை, மிகச் குறுகிய நேர இடைவெளியில் (Δt) ஒரு பொருளின் மீது செயல்பட்டால் நியூட்டன் இரண்டாம் விதியின் எண் மதிப்பு வடிவில் இந்நிகழ்வினை பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$Fdt = dp$$

தொடக்க நேரம் t_i மற்றும் இறுதி நேரம் t_f என்ற கால இடைவெளியில் இச்சமன்பாட்டை தொகையிட

$$\int_i^f dp = \int_{t_i}^{t_f} Fdt$$

$$p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} Fdt$$

p_i என்பது t_i என்ற நேரத்தில் பொருளின் ஆரம்ப உந்தம்

p_f என்பது t_f என்ற நேரத்தில் பொருளின் இறுதி உந்தம்

$p_f - p_i$ Δp என்பது $t_f - t_i = \Delta t$ என்ற நேர இடைவெளியில் பொருளின் ஏற்பட்ட உந்த மாற்றமாகும்.

தொகையீடு $\int_{t_i}^{t_f} Fdt = J$ என்பது கணத்தாக்கு எனப்படும். மேலும், இக்கணத்தாக்கு பொருளின் உந்த மாற்றத்திற்கு சமமாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட நேர இடைவெளியில் விசை ஒரு மாறா மதிப்பைப் பெற்றிருப்பின்

$$\int_{t_i}^{t_f} Fdt = F\int_{t_i}^{t_f} dt = F\left(t_f - t_i\right) = F\Delta t$$

$$F\Delta t = \Delta p$$

சமன்பாடு (3.24) க்கு "கணத்தாக்கு – உந்தச் சமன்பாடு" என்று பெயர்

விசை ஒரு மாறா மதிப்பைப் பெற்றுள்ளபோது, கணத்தாக்கு $J = F\Delta t$ எனக் குறிப்பிட்ப்படுகிறது. மேலும், இது Δt என்ற நேர இடைவெளியில் பொருளில் எற்படும் உந்த மாற்றத்திற்கு (Δp) சமம் ஆகும்.

கணத்தாக்கு ஒரு வெக்டர் அளவாகும். இதன் அலகு Ns

ஒரு சிறிய நேர இடைவெளியல் பொருளின்மீது செயல்படும் சராசரி விசையைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்யலாம்.

$$F_{avg} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

சமன்பாடு (3.25)லிருந்து, நேர இடைவெளி மிகக் குறுகியதாக இருப்பின், பொருளின்மீது செயல்படும் சாராசரி விசை மிக அதிகமாக இருக்கும். பொருளின் உந்தம் எப்பொழுதெல்லாம் மிகவேகமாக மாற்றமடைகிறதோ, அப்பொழுதெல்லாம் சராசரி விசை மிக அதிகமாக இருக்கும்.

கணத்தாக்கை, சராசரி விசையின் அடிப்படையிலும் எழுதலாம். ஏனெனில் பொருளின் உந்த மாற்றம் Δp கணத்தாக்கு (J) சமமாகும். எனவே

$$J = F_{avg} = \Delta t$$

மாறா விசையினால் ஏற்றபடும் கணத்தாக்கு மற்றும் மாறும் விசையினால் ஏற்படும் கணத்தாக்கு ஆகியவற்றின் வரைபட படம் 3.21 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

மாறாவிசை கணத்தாக்கு மற்றும் மாறும் விசை கணத்தாக்கு

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. கிரிக்கெட் வீரர், வேகமாகவரும் பந்தினை பிடிக்கும்போது அவரின் கரங்களை பந்து வரும் திசையிலேயே படிப்படியாக தாழ்த்துவதன் காரணம் என்ன?

கிரிக்கெட் வீரர் பந்தைப்பிடித்த உடன் தன்னுடைய கரங்களை தாழ்த்தாமல் உடனடியாக நிறுத்தினால் பந்து உடனடியாக ஓய்வுநிலைக்கு வரும். அதாவது பந்தின் உந்தம் உடனடியாக சுழியாகிறது. இதனால் கரங்களின் மீது பந்து செலுத்தும் சராசரி விசை பெரும மதிப்பைப் பெறும். எனவே கிரிக்கெட் வீரரின் கரங்கள் வேகமாக தாக்கப்பட்டு அவர் அதிக வலியினை வேகமாக தாக்கப்பட்டு அவர் அதிக வலியினை உணர்வார். இதனைத் தவிர்ப்பதற்காகத்தான் அவர் தன்னுடைய கரங்களை படிப்படியாக தாழ்த்துகிறார்.

2. வேகமாகச் செல்லும் கார் ஒன்று விபத்திற்குள்ளாகும்போது அதன் உந்தம் மிகக்குறைந்த நேரத்தில் மிக வேகமாக் குறைகிறது. இது பயணிகளுக்கு பேராபத்தை விளைவிக்கும். ஏனெனில் பயணிகளின் மீது இவ்வுந்த மாற்றம் பெரும விசையினைச் செலுத்தும். மரணத்தை ஏற்படுத்தும் இந்த விளைவிலிருந்து பயணிகளைக் காக்க காற்றுப்கைபளுடன் கார்கள் தற்போது வடிவமைக்கப்படுகின்றன. இந்தக் காற்றுப்பைகள் பயணிகளின் உந்த மாற்றக் காலத்தை நீட்டித்து அவர்கள் பெரும் விசையைப்பெறுவதிலிருந்து தடுக்கிறது.

3. இரு சக்கர வாகனங்களில் பொருத்தப்பட்டுள்ள அதிர்வுத்தாங்கிகள் (Shock absorbers):

கார்களில் உள்ள காற்றுப்பைகள் போன்றே இவையும் அதிர்வுதாங்கிகளாக செயலாற்றுகின்றன. மேடுபள்ளங்களில் வாகனம் செல்லும் போது ஒரு திடீர் விசையானது உடனடியாகவாகனத்தின் மீது செலுத்தப்படுகிறது. இவ்விசை பயணிகளை உடனடியாகத் தாக்காமல் அதன் தாக்குதல் நேரத்தை நீட்டிக்க அதிர்வுத்தாங்கிகள் பயன்படுகின்றன. எனவே பயணிகள் பெரும விசையை உணர்வதிலிருந்து தடுக்கப்படுகின்றனர். அதிர்வுத்தாங்கிகள் சரிவர இயங்காத வாகனங்களில் பயணம் செய்வது நமது உடலை பாதிக்கும்.

4. மணல் நிரப்பிய தரையில் குதிப்பதைவிட, கான்கிரீட் தரையில் குதிப்பது பேராபத்தை விளைவிக்கும். ஏனெனில், மணல் நிரப்பப்பட்ட தரை நமது உடல் ஓய்வு நிலையை அடையும் நேரத்தை நீடித்து உடல் பெரும விசையைப் பெறுவதிலிருந்து தடுக்கும். ஆனால் கான்கிரீட் தளத்தில் குதிக்கும் போது உடல் உடனடியாக ஓய்வு நிலைக்கு வந்து ஒரு பெரும விசையை உணரும். இது பேராபத்தை விளைவிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுக:

$15 ms^{-1}$ வேத்தில் இயங்கம் 10 kg நிறையுடையபொருள் சுவர் மீது மோதி

அ. 0.03s
ஆ. 10s

ஆகிய நேர இடைவெளிகளில் ஓய்வுநிலையை அடைகிறது. இவ்விரண்டு நேர இடைவெளிகளிலும் பொருளின் கணத்தாக்கு மற்றும் பொருளின் மீது செயல்படும் சராசரி விசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

பொருளின் ஆரம்ப உந்தம்

$$p_i = 10 \times 15 = 150 kg\ ms^{-1}$$

பொருளின் இறுதி உந்தம் $p_f = 0$

$$\Delta p = 150 - 0 = 150kg \text{ ms}^{-1}$$

(அ) கணத்தாக்கு $J = \Delta p = 150Ns.$ (நேர்வு அ)

(ஆ) கணத்தாக்கு $J = \Delta p = 150Ns.$ (நேர்வு ஆ)

(அ) சராசரி விசை $F_{avg} = \frac{\Delta p}{\Delta t =} = \frac{150}{0.03} = 5000N$ (நேர்வு அ)

(ஆ) சராசரி விசை $F_{avg} = \frac{150}{10} = 15N$ (நேர்வு ஆ)

இரண்டு நேர்வுகளிலும் பொருளின் கணத்தாக்கு சமம். ஆனால் பொருளின் மீது செயல்படும் சராசரி விசை வெவ்வேறானவை.

உராய்வு

அறிமுகம்:

மேசை ஒன்றில் ஓய்வு நிலையிலுள்ள பொருளின் மீது இலேசான விசையைச் செலுத்தினால் அப்பொருள் இயங்காது. இதற்குக் காரணம், மேசையின்பரப்பு பொருள் நகர்வதைத் தடுக்கும் வகையில் அப்பொருளின் மீது செலுத்தும் எதிர்விசையாகும். இந்த எதிர்விசைக்கு உராய்வு விசை என்று பெயர். இவ்வுராய்வு விசையானது பொருள் மற்றும் பொருள் வைக்கப்பட்ட பரப்பு இவற்றிற்கிடையேயான சார்பியக்கத்தை (relative motion) ஏதிர்க்கும் வகையில் அமையும். பொருளின்மீது நம செலுத்தும் விசையின் அளவை படிப்படியாக அதிகரிக்கும் போது ஒரு குறிப்பிட்ட விசைக்கு பொருள் நகரத் தொடங்கும்.

சார்பு இயக்கம்:

பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளதளத்திற்கு இணையாக ஒரு விசையை பொருளின்மீது இணையாக ஒரு விசையை பொருளின்மீது செலுத்தினால், அவ்விசை பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள தளத்தைப் பொருத்து பொருளை இயங்கவைக்க முயற்சிக்கலாம். இச்சார்பு இயக்கத்தை எதிர்க்கும் வகையில் பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு, நாம் செருத்தும் விசைக்கு எதிர்த் திசையில் பொருளின் மீது உராய்வு விசையச் செலுத்தும்.

உராய்வு விசை எப்பொழுதும் பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்புக்கு இணையாக அப்பொருளின் மீது செல்படும்.

உராய்வு இரண்டு வகைப்படும். அவை

1. ஓய்வு நிலை உராய்வு (Static friction)

2. இயக்க நிலை உராய்வு (Kinetic friction)

ஓய்வு நிலை உராய்வு ($f_s^{'}$)

ஓய்வுநிலை உராய்வு ஒரு பரப்வில் வைக்கப்பட்டுள்ள பொருள் நகரத் தொடங்குவதை எதிர்க்கும் வகையில் அமையும் விசையாகும். பரப்பு ஒன்றில் ஓய்வு நிலையிலுள்ள பொருளின் மீது இரண்டு விசைகள் செயல்படும். அவை கீழ்நோக்கிச் செல்படும் புவியீர்ப்பு விசை மற்றும் மேல்நோக்கிச் செயல்படும். அவை கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை மற்றும் மேல்நோக்கிச் செயல்படும் வெங்குத்து விசை. பொருளின் மீது செயல்படும் இவ்விரண்டு விசைகளின் தொகுபயன் சுழியாகும். இதன் விளைவாக பொருள் ஓய்வுநிலையில் இருக்கும்.

பரப்பு ஒன்றில் ஓய்வு நிலையிலுள்ள பொருளின்மீது பரப்பிற்கு இணையாக வெளிப்புறு விசை (F_{ext}) ஒன்று செயல்படும்போது, அப்பரப்பு இவ்வெளிப்று விசைக்குச் சமமான எதிர் விசையை பொருளின் மீது செலுத்தி அதன் இயக்கத்தைத் தடுத்து அப்பொருளை ஓய்வு நிலையில் வைக்க முயற்சிக்கும். இதிலிருந்து வெளிப்புற விசையும், உராய்வு விசையும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் மற்றும் எதிரெதிராக செயல்படும் என்பதை அறியலாம். எனவே பரப்புக்கு இணையாக எவ்வித இயக்கமும் ஏற்படாது,

ஆனால் பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் வெளிப்புற விசையின் அளவை படிப்படியாக அதிகரிக்கும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குமேல் பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு, பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் வெளிப்புற விசையைச் சமன்செய்யும் அளவிற்கு எதிர் உராய்வு விசையைப் பொருளின்மீது செலுத்த இயலாது. எனவே பொருள் பரப்பின் மீது சறுக்கிச் செல்லத்தொடங்கும். இதுவே பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு பொருளின் மீது செலுத்தும் பெரும ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை ஆகும். சோதனை ரீதியாக, இப் பெரும் ஓய்வுநிலை உராய்வு விசையானது அனுபவத்தின் அடிப்படையில் (empirical formula) பெற்ற கீழ்க்காணும் கணிதத் தொடர்பைக் கொண்டடிருக்கும்.

$$o \le f_s \le \mu_s N$$

இங்கு μ_s என்பது ஓய்வு நிலை உராய்வுக் குணகம் எனப்படும். இது ஒன்றை ஒன்று தொடும் இரு பரப்புகளின் தன்மையைச் சார்ந்திருக்கும். N என்பது பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு, பொருளின் மீது செலுத்தும் செங்குத்து விசையாகும். சில நேரங்களில் இச்செங்குத்து விசை mg க்கு சமமாகும். ஆனால் இது எப்பொழுதும் mg க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை, சுழி முதல் μ_s வரையிலான எந்த மதிப்பையும் பெற்றிருக்கலாம் என்பதைச் சமன்பாடு (3.27) நமக்கு உணரத்துகிறது.

எவ்வித வெளிப்புற விசையும் செயல்படாதபோது, ஓய்வுநிலையிலுள்ள பொருள் மீது செயல்படும் ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை f_s ன் மதிப்பு (f_s=0)

ஓய்வுநிலையிலுள்ள பொருளின்மீது, அப்பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பிற்கு இணையாக வெளிப்புற் விசையொன்று பரப்பிற்கு இணையாக வெளிப்புற விசையொன்று செல்படும்போது, பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பிற்கு இணையாக வெளிப்புற விசையொன்று செயல்படும்போது, பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு பொருளின் மீது செலுத்தும் ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை, பொருளின்மீது செலுத்தப்படும் வெளிப்புற விசைக்குச் சமமாகும். ($f_s = F_{ext}$) இருப்பினும் f_s ன் மதிப்பு $\mu_s N$ ஐ விடக் குறைவாகத்தான் இருக்கும்.

பொருளானது, பரப்பின் மீது நகரத் தொடங்கும்போது, பொருளின்மீது செயல்படும் ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை (f_s) பெரும மதிப்பை அடையும்.

ஓய்வு நிலை உராய்வு மற்றும் பிற்பகுதியில் நாம் கற்கவிருக்கும் இயக்க உராய்வு இவ்விரண்டும் பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் செங்குத்து விசையைச் சார்ந்திருக்கும், பொருள், அப்பொருள் வைக்கப்பட்ட பரப்பை எவ்வளவு வலிமையாக அழுத்துகிறதோ அதற்கேற்ப பொருளின் மீது செயல்படும் செங்குத்து விசையும் அதிகரிக்கும். இதன்விளைவாகப் பொருளை நகர்த்துவது மேலும் கடினமாகும். இது படங்கள் 3.23 (அ) மற்றும் 3.23 (ஆ) ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. மேலும் ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை பொருள் மற்றும் பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு இவ்விரண்டும் தொட்டு கொண்டிருக்கும் பரப்பின் அளவைச் சார்ந்ததல்ல.

எடுத்துக்காட்டு:

2kg நிறையுடைய பொருளொன்று தளம் ஒன்றில் ஓய்வுநிலையில் உள்ளது என்க. பொருள் மற்றும் தளத்திற்கிடையேயான ஓய்வு நிலை உராய்வுக் குணகம் எனில், அத்தளத்தின் மீது பொருளை நகர்த்துவதற்கு எவ்வளவு விசையைச் செலுத்த வேண்டும்.

தீர்வு

பொருள் ஓய்வு நிலையில் உள்ளதால், பொருளின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை, அப்பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள தளமானது, பொருளின் மீது செலுத்தும் செங்குத்து விசையினால் சமன் செய்யப்படும்

$$N=mg$$

ஓய்வு நிலை உராய்வு விசையின் பெரும மதிப்பு $f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s mg$

$$f_s^{\max} = 0.8 \times 2 \times 9.8 = 15.68N$$

எனவே, பொருளைப் பரப்பின் மீது நகர்த்துவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய புறவிசை, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெரும ஓய்வு நிலை உராய்வு விசையை விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும்

$$F_{ext} > 15.68 \text{ N}$$

எடுத்துக்காட்டு:

50 kg நிறையுடைய பொருள் தளம் ஒன்றில் ஓய்வுநிலையில் உள்ளது. அப்பொருளினை நகர்த்த அதன் மீது 5 N விசை செலுத்தப்படுகிறது. எனினும் பொருள் நகரவில்லை. இந்நிலையில் பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள தளம், பொருளின் மீது செலுத்தும் உராய்வு விசையைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

பொருள் ஓய்வு நிலையில் உள்ளபோது, பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் வெளிப்புறு விசையும், பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள தளம் பொருளின்மீது செலுத்தும் உராய்வு விசையும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் மற்றும் எதிரெதிராகச் செயல்படும்.

இவ்விரு விசைகளின் எண் மதிப்புகளும் சமமாகும் $f_s = F_{ext}$

எனவே, பொருளின் மீது செயல்படும் ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை

$$f_s = 5 \text{ N.}$$

உராய்வு விசையின் திசை, வெளிப்புற விசையின் திசைக்கு F_{ext} எதிர்த் திசையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு:

7 kg மற்றும் 5 kg நிறையுடைய இரண் பொருட்கள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு மேசையின் முனையில் பொருத்தப்பட்டுள்ள கப்பி ஒன்றின் வழியே செல்லும் மெல்லிய கயிற்றின் இரண்டு முனைகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பொருளுக்கும், பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்புக்கும் இடையேயான ஓய்வு நிலை உராய்வுக் குணகத்தின் மதிப்பு 0.9 எனில் பரப்பின் மீது வைக்கப்பட்டிருக்கும் 7 kg நிறையுடைய m_1 என்ற பொருள் நகருமா? அவ்வாறு நகரவில்லை எனில் m_2 நிறையின் எம்மதிப்பிற்கு m_1 நிறை நகரத் துவங்கும்?

தீர்வு

படத்தில் காட்டியவாறு m_1 நிறையின் மீது நான்கு விசைகள் செயல்படுகின்றன

அ. எதிர்க்குறி y அச்சுத்திசையில் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (m_1g)

ஆ. நேர்க்குறி y அச்சுத்திசையில் மேல் நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (N)
இ. m_2 நிறையினால் நேர்க்குறி x அச்சுத்திசையில் செயல்படும் இழுவிசை
ஈ. எதிர்க்குறி திசையில் x அச்சுத்திசையில் செயல்படும் உராய்வு விசை

இங்கு, நிறை m_1 எவ்விதமான செங்குத்து இயக்கத்தையும் மேற்கொள்ளவில்லை. எனவே, $m_1g=N$

பரப்பின் மீது m_1 நிறை நகர்கிறதா எனக் கண்டறிய, m_1 நிறை வைக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு, m_1 நிறையின்மீது செலுத்தும் பெரும ஓய்வுநிலை உராய்வினைக் காண வேண்டும். நிறை m_1 மீது செயல்படும் இழுவிசை, பெரும ஓய்வு நிலை உராய்வு விசையை விட அதிகமாகவோ இருப்பின் பொருள் நகரத்துவங்கும்.

$$f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s mg$$
$$f_s^{\max} = 0.9 \times 7 \times 9.8 = 61.74N$$

இழுவிசை = T = m_2g = 5x9.8 = 49 N

T< $f_s^{\max}$

நிறை m_1 மீது செயல்படும் இழுவிசை, ஓய்வு நிறை உராய்வை விடக் குறைவாக இருப்பதனால் நிறை m_1 பரப்பின் மீ நகராது.

m_1 நிறையை நகர்த்த T > $f_s^{\max}$ இங்கு T =m_2g

$$m_2 = \frac{\mu_s m_1 g}{g} = \mu_s m_1$$
$$m_2 = 0.9 \times 7 = 6.3kg$$

நிறை m_2 மதிப்பு 6.3 மப விட அதிகம் எனில், நிறை m_1 பரப்பின் மீது நகரத் தொடங்கும்.

பரப்பில் எவ்வித உராய்வும் இல்லை எனில் அதாவது வழுவழுப்பான பரப்பு எனில், நிறை m_2 வின் எந்தவொரு மதிப்பிற்கும் நிறை m_1 பரப்பின் மீது நகர்ந்து செல்லும் என்பதை இங்கு நினைவில் கொள்ள வெண்டும்.

சோடிப்பொருட்களின் பரப்புகளுக்கிடையேயான ஓய்வு நிலை உராய்வுக் குணகத்தின் மதிப்பு, அட்டவணை 3.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ள பனிக்கட்டித் துண்டுகளுக்கிடையேயான ஓய்வு நிலை உராய்வுக் குணகம் மிகக்குறைந்த மதிப்பைப் பெற்றுள்ளதை இங்கு கவனிக்கவும். ஒரு பனிக்கட்டித்துண்டை மற்றொரு பனிக்கட்டித் துண்டின்மீது எளிதாக நகர்த்த முடியும் என்பதை இது சுட்டிக்காட்டுகிறது.

இயக்க உராய்வு (kinetic friction)

பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் புற விசை, ஓய்வு நிலை உராய்வு விசையின் பெரும மதிப்பைவிட அதிகமாக இருக்கும்போது, பொருள் பரப்பின் மீது நகர்ந்து செல்லத் துவங்கும். அவ்வாறு நகர்ந்து செல்லும் பொருளின் மீது, பொருள் நகர்ந்து செல்லும் பரப்பு ஒரு உராய்வு விசையைச் செலுத்தும், அவ்வுராய்வு விசையே இயக்கநிலை உராய்வு எனப்படும்.

இவ்வியக்க உராய்வு, சறுக்கு உராய்வு என்றும் அழைக்கப்படும். பொருளொன்றை சீரான திசைவேகத்தில் இயக்க, அப்பொருளின் மீது செயல்படும் இயக்க உராய்வின் எண்மதிப்பிற்குச் சமமாகவும் அதற்கு எதிர்த்திசையிலும் ஒரு விசையினைப் பொருளின்மீது செலுத்த வேண்டும்.

இயக்க உராய்வின் எண்மதிப்பு கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டின்படி அமைய வேண்டும் என்று சோதனைகளின் அடிப்படையில் கண்டறியப்பட்டுள்ளது.

சோடிப் பொருட்களுக்கிடையேயான ஓய்வுநிலை உராய்வுக் குணகம்

சோடிப் பொருள்கள்	ஓய்வுநிலை உராய்வுக் குணகம்
கண்ணாடி மற்றும் கண்ணாடி	1.0
பனிக்கட்டி மற்றும் பனிக்கட்டி	0.10
எ∴கு மற்றும் எ∴கு	0.75
மரக்கட்டை மற்றும் மரக்கட்டை	0.35
இரப்பர் டயர மற்றும் கான்கீரிட் சாலை	1.0
இரப்பர் டயர் மற்றும் ஈரமான சாலை	0.7

$f_k = \mu_k N$

இங்கு μ_k எனக்கு இயக்க உராய்வுக் குணகம் மற்றும் N என்பது பொருள் நகர்ந்து செல்லும் பரப்பு பொருளின் மீது செலுத்தும் செங்குத்துவிசை.

மேலும் $\mu_k < \mu_s$

இதிலிருந்து நாம் அறிந்து கொள்வது என்னவெனில் இயங்கும் பொருள் அன்றைத் தொடர்ந்து இயங்கவைப்பதைவிட, அப்பொருளின் இயக்கத்தைத் தொடங்குவது கடினமாகும்.

ஓய்வு நிலை உராய்வுமற்றும் இயக்கநிலை உராய்வு ஆகியவற்றின் சிறப்புக்கூறுகள் அட்டவணை 3.2 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஓய்வுநிலை உராய்வு மற்றும் இயக்க உராய்வின் சிறப்புக் கூறுகள்

ஓய்வு நிலை உராய்வு	இயக்க உராய்வு
பொருள் நகரத்தொடங்குவதை எதிர்க்கும்	பொருள் நகரும் பரப்பைப் பொருத்து பொருளின் சார்பியக்கத்தை எதிர்க்கும்
தொடும் பரப்பின் அளவினைச் சார்ந்ததில்லை கொடுக்கப்படும் விசையின் எண் மதிப்பைச் சார்ந்தது	தொடும் பரப்பின் அளவினைச் சார்ந்ததில்லை விசையின் எண் மதிப்பைச் சார்ந்ததில்லை
ஓய்வு நிலை உராய்வுக் குணகம் μ_s ஒன்றை ஒன்று தொடும் பரப்பு பொருட்களின் தன்மையை (Nature of materials) சார்ந்திருக்கும்.	இயக்க உராய்வுக் குணகம் μ_k ஒன்றை ஒன்று தொடும் பரப்புகளின் தன்மை மற்றும் பரப்புகளின் வெப்பநிலை ஆகியவற்றைச் சார்ந்திருக்கும்
சுழியிலிருந்து $\mu_s N$ வரை உள்ள எந்த ஒரு மதிப்பினையும் பெற்றிருக்கும்.	இது எப்பொழுதும் சுழி மதிப்பினைப் பெறாது. மேலும் பொருள் எந்த வேகத்தில் இயங்கினாலும் இதன்மதிப்பு எப்பொதும் μ_k க்குச் சமமாகும். (பொருளின் வேகம் $10 ms^{-1}$ ஐவிட குறைவாக உள்ள போது இது பொருந்தும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்)
$f_s^{max} >$ f_k ஓய்வுநிலை உராய்வு விசையின் பெரும மதிப்பு அதிகமாக இருக்கும்.	இயக்கநிலை உராய்வு விசை குறைவாக இருக்கும்
$\mu_k >$ μ_s ஓய்வுநிலை உராய்வுக் குணகம் அதிகமான மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.	இயக்கநிலை உராய்வு குணகம், குறைவான மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் புறவிசையினைப் பொருத்து ஏற்படும் ஓய்வு நிலை உராய்வுவிசை மற்றும் இயக்கநிலை உராய்வு விசையின் மாறுபாடு வரைபடம் 3.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

புறவிசையினைப் பொருத்து ஓய்வு நிலை உராய்வு விசை மற்றும் இயக்க உராய்வு விசையில் ஏற்படும் மாறுபாடு

படம் 3.25 லிருந்து, ஓய்வு நிலை உராய்வு விசையானது, ஒரு பெரும மதிப்பை அடையும்வரை, வெளிப்புத்திலிருந்து பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் புறவிசையோடு நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பில் அதிகரிக்கும். பொருள் இயங்கத் தொடங்கும்போது இயக்கநிலை உராய்வு விசை ஓய்வு நிலை உராய்வு விசையின் பெரும மதிப்பைவிடச் சற்றே குறைவான மதிப்பைப் பெறும். மேலும் இயக்க உராய்வு விசை ஒரு மாறா மதிப்பைப் பெற்றிருப்பதுடன் அது பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் வெளிப்புற விசையைச் சார்ந்ததல்ல என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்.

பொருள் ஒன்றினை நகரத்த எளிமையான முறை எது? அப்பொருளைத் தள்ளுவதா? அல்லது இழுப்பதா?

பொருள் ஒன்றை சழி முதல் $\frac{\pi}{2}$ வரையிலான ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் தள்ளும்போது, பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் புறவிசையை F பரப்பிற்கு இணையாக $F \sin\theta$ என்றும் பரப்பிற்குச செங்குத்தாக $F \cos\theta$ என்றும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். இது படம் 3.26 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. பொருளின் மீது செயல்படும் கீழ்நோக்கிய மொத்த விசை $mg + F\cos\theta$ இது பொருள் மீது செயல்படும் செங்குத்து விசை அதிகரிக்கும் என்பதைக் காட்டுகிறது. இங்கு செங்குத்துத் திசையில் எவ்விதமான முடுக்கமும் இல்லை. எனவே, பொருளின் மீது செயல்படும் செங்குத்துவிசை.

$$N_{push} = mg + F\cos\theta$$

பொருளொன்றை θ கோணத்தில் தள்ளுதல்

இதன் விளைவாக ஓய்வு நிலை உராய்வின் பெரும மதிப்பும் பின்வரும் சமன்பாடின்படி அதிகரிக்கும்

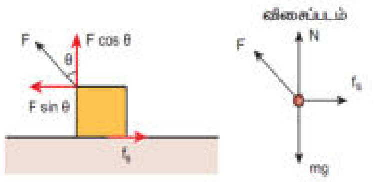
$$f_s^{\max} = \mu_s N_{push} = \mu_s\left(mg + F\cos\theta\right)$$

சமன்பாடு (3.30) லிருந்து பொருளைத் தள்ளுவதன் மூலம் நகர்த்துவதற்று அதிக விசை தேவைப்படும் என்பது புலனாகிறது.

பொருளொன்றை கோணத்தில் இடுக்கும்போது பொருளின் மீது நாம் செலுத்தும் விசையினை படம் 3.27 இல் காட்டியுள்ளபடி இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

பொருளின் மீதான மொத்த கீழ்நோக்கு விசை

$$N_{pull} = mg - F\cos\theta$$



பொருளொன்றை θ கோணத்தில் இழுத்தல்

சமன்பாடு 3.31 லிருந்து பொருள் மீது செயல்படும் செங்குத்து விசை N_{pull} இன் மதிப்பு N_{push} இன் மதிப்பை விட குறைவே என்பதை அறியலாம். எனவே 3.29 மற்றும் 3.31 ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரு பொருளை நகர்த்துவதற்குத் தள்ளுவதை விட இழுப்பதே உளிய வழி என்பது புரிகிறது.

உராய்வுக் கோணம்

செங்குத்து எதிர் விசை மற்றும் பெரும உராய்வு விசை ($f_s^{\max}$) ஆகிய இரண்டின் தொகுபயனுக்கும் (R) செங்குத்து எதிர்விசை (to)க்கும் இடையேயான கோணம் உராய்வுக் கோணம் எனப்படுகிறது.

படம் 3.28 லிருந்து தொகுபயன் விசை

$$R = \sqrt{\left(f_s^{\max}\right)^2 + N^2}$$

$$\tan\theta = \frac{f_s^{\max}}{N}$$

உராய்வுக் கோணம்

உராய்வுத் தொடர்புகளிலிருந்து $f_s^{\max} = \mu_s N$ ஆக இருக்கும்போது பொருள் சறுக்கத் துவங்கும் அதனை கீழ்க்காணுமாறும் எழுதலாம்.

$$\frac{f_s^{\text{பெருமம்}}}{N} = \mu_s$$

சமன்பாடு (3.32) மற்றும் (3.33) ஆகியவற்றிலிருந்து ஓய்வுநிலை உராய்வுற்கான குணகம்

$$\mu_s = \tan\theta$$

ஓய்வுநிலை உராய்விற்கான குணகம் உராய்வுக் கோணத்தின் டான்ஜென்ட் ($\tan\theta$) மதிப்பிற்குச் சமமாக இருக்கும்.

சறுக்குக்கோணமம் (Angle of repose)

படம் 3.29 இல் காட்டியவாறு பொருளொன்று சாய்தளப்பரப்பில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சாய்தளப்பரப்பு கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தில் உள்ளது. θ வின் சிறிய மதிப்புகளுக்கு சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பொருள் நகராது. θ வின் மதிப்பை படிப்படியாக உயத்ததும் போது, ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு, சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பொருள் நகரத் தொடங்கும். அக்குறிப்பிட்ட கோணமே சறுக்குக்கோணம் எனப்படும். சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பொருள் நகரத் தொடங்கும். அக்குறிப்பிட்ட கோணமே சறுக்குக்கோணம் எனப்படும். சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பொருள், கிடைத்தளப் பரப்புடன் சாய்தளம் ஏற்படுத்தும் எக்கோணத்தில் நகரத் தொடங்குகிறதோ, அக்கோணமே, சறுக்குக்கோணம் எனப்படும்.

பொருளின்மீது செயல்படும் பல்வேறு விசைகளைக் கருதுக. புவியீர்ப்புவிசை mg ஐ இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். சாய்தளப்பரப்பிற்கு இணையான கூறு mg $\sin\theta$ மற்றும் சாய்தளப்பரப்பிற்கு எதிர் செங்குத்தான கூறு mg $\cos\theta$ ஆகும்

சாய்தளப்பரப்பிற்கு இணையாகச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையின் கூறு (mg $\sin\theta$) பொருளை கீழ்நோக்கி நகர்த்த முயற்சிக்கும். சாய்தளப்பரப்பிற்கு செங்குத்தாகச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையின் கூறு (mg $\cos\theta$), செங்குத்து விசை (N) ஐ சமன் செய்யும்

எனவே N= mg $\cos\theta$

பொருள் நகரத் தொடங்கும் போது, ஓய்வுநிலை உராய்வு விசை

$$f_s = f_s^{\max} = \mu_s mg\cos\theta$$

இந்த ஓய்வுநிலை உராய்வின் பெருமமதிப்பு, பின்வரும் சமன்பாட்டையும் நிறைவு செய்யும்.

$$f_s^{\max} = mg\sin\theta$$

சமன்பாடு (3.36) ஐ(3.35) ஆல்வகுக்கக்கிடைப்பது,

$$\mu_s = \sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$$

மேலும் உராய்வுக்கோணவரையறையிலிருந்து

$$\tan\theta = \mu_s$$

இங்கு என்பது உராய்வு கோணமாகும்.

எனவே, சறுக்குக்கோணமும் உராய்வுக் கோணமும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும். ஆனால் இவற்றிற்கிடையேயான வேறுபாடு என்னவெனில, சறுக்குக்கோணத்தை சாய்தளப்பரப்பில் மட்டுமே பயன்படுத்தமுடியும். ஆனால் உராய்வுக்கோணத்தை எத்கைய பரப்பிலும் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு.

கிடைத்தளத்துடன் 60° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள, சாய்தளத்தின்மீது அ நிறையுள்ள பொருளொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பொருள் $\frac{g}{2}$ என்ற முடுக்கத்துடன் கீழ்நொக்கிச் சறுக்கி சென்றால் அப்பொருளின் இயக்க உராய்வு குணகத்தைக் காண்க.

தீர்வு

பொருள் சாய்தளத்தில் சறுக்கிச் செல்லும்போது இயக்க உராய்வு ஏற்படுகிறது.

பொருளினமீது கீழ்க்கண்ட விசைகள் செயல்படுகின்றன அவை தளத்திற்கு செங்குத்தாக செயல்படும். செங்குத்து விசை, கிழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீரப்புவிசை மற்றும் தளத்திற்கு இணையாகச் செயல்படும் இயக்க உராய்வு விசை

x அச்சுத்திசையில்

$$mg\sin\theta - f_k = ma$$

ஆனால் $a = g/2$

$$mg\sin 60^\circ - f_k = mg/2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mg - f_k = mg/2$$

$$f_k = mg\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$f_f = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]mg$$

y-அச்சுத்திசையில் எவ்வித இயக்கமும் இல்லை. எனவே செங்குத்து விசை (N), அபு உழள என்ற கூறினால் சமன் செய்யப்படுகிறது.

$$mg \cos\theta = N = mg / 2$$

$$f_f = \mu_k N = \mu_k mg / 2$$

$$\mu_k = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) mg}{\frac{mg}{2}}$$

$$\mu_k = \sqrt{3} - 1$$

சறுக்குக் கோணத்தின் பயன்கள்:

1. எறும்புகளை உணவாகக் கொள்ளும் குள்ளாம்பூர் (Antlion) எனப்படும் ஒரு வகைப் பூச்சியினம், மணற் பரப்பில் சிறு சிறு குழிகளை ஏற்படுத்தியிருக்கும். அக்குழிகுள் செல்லும் எறுப்பு போன்றவை தப்பிச் செல்ல முடியாது. குழியின் அடியில் காத்திருக்கும் குள்ளாம்பூச்சி, எறும்பினை உட்கொள்ளும். குழிகளின் சாய்கோணம் சறுக்குக் கோணத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்படி குழிகள் உருவாக்கப்பட்டிருப்பதை படம் 3.30 இல் காணலாம்.

குள்ளாம் பூச்சிகளினால் (antlions) உருவாக்கப்பட்டிருக்கும் மணற்குழிகள்

2. குழந்தைகள் ஆர்வமுடன் விளையாடும் சறுக்குமர விளையாட்டு படம் 3.31 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. சறுக்கு மரத்தின் சாய்கோணம், அதன் சறுக்குக் கோணத்தை விட அதிகமாக உள்ளபோது சறுக்கி விளையாடுவது சுலபமாகும். அதே நேரத்தில் சறுக்குக்கோணம் மிகவும் அதிகமாக இருந்தால், சறுக்கி விளையாடும் குழந்தை மிக அதிக வேகத்துடன் அடிப்பரப்பை அடையும் இது குழந்தைகளுக்கு உடல் விலியை ஏற்படுத்திவிடும்.

உருளும் உராய்வு (Rolling friction)

மனித நாகரிக வளர்ச்சியில், சக்கரத்தின் பங்கு மகத்தானது. பயணப் பெட்டிகளின் (Suitcases) அடியில் சக்கரங்களைப் பொருத்தி அவற்றை சுமந்து செல்லாமல் இழுத்துச் செல்வதை (Rolling Suitcase) நாம் அன்றாட வாழ்வில் பார்க்கிறோம். பொருளொன்று பரப்பில் இயங்குகிறது எனில் அடிப்படையில் அப்பொருள் பரப்பில் சறுக்கிச் செல்கிறது. ஆனால் சக்கரங்கள் உருளுவதன் மூலம் பரப்பில் இயங்குகின்றன.

சக்கரம் பரப்பில் இயங்கும்போது, சக்கரத்தின் எப்புள்ளி பரப்பைத் தொடுகிறதோ, அப்புள்ளி எப்பொழுதும் ஓய்வுநிலையில் இருக்கும். அதாவது, சக்கரத்திற்கும், பரப்பிற்கும் இடையே எவ்விதமான சார்பியக்கமும் இல்லை. எனவே உராய்வு விசையும் மிகக்குறைவு. அதே நேரத்தில் பொருளொன்று பரப்பின்மீது சக்கரங்கள் இன்றி செல்லும்போது, பொருளுக்கும் பரப்பிற்கும் இடையே ஒரு சார்பியக்கம் ஏற்படுகிறது. இதன் விளைவாக அதிக உராய்வுவிசை ஏற்படுகிறது. இதனால் பொருளினை நகர்த்துவது கடினமாகும். படம் 3.32 உருளுதலின் உராய்விற்கும், இயக்க உராய்விற்கும் உள்ள வேறுபாட்டைச் சுட்டிக் காட்டுகிறது.

சறுக்கலற்ற உருளும் இயக்கத்தில் பரப்பினைத் தொடும்புள்ளி ஓய்வுநிலையில் இருப்பது இலட்சிய நிலையில் மட்டுமே சாத்தியமாகும். ஆனால் நடைமுறையில் அவ்வாறு இருப்பதில்லை. பொருட்களின் நெகிழ்வுத் தன்மை (elastic) காரணமாக தரையைத் தொடும்புள்ளி சற்றே தரையில் அழுத்தி மிகக்குறைவான உராய்வினை ஏற்படுத்துகிறது. இது படம்3.33 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. எனவே வாகனத்தின் சக்கரத்திற்கும், சாலையின் பரப்பிற்குமிடையே உராய்வுவிசை ஏற்படுகிறது. இவ்வுராய்வு, இயக்க உராய்வை விட மிகவும் வலிமை குறைந்தது ஆகும்.

உராய்வைக் குறைக்கும் முறைகள்:

உராய்வு நடைமுறை வாழ்க்கையில் நன்மை, தீமை இரண்டையும் ஏற்படுத்துகிறது. சில சூழ்நிலைகளில் உராய்வு மிகவும் அவசியமானதாகும். ஊராய்வின் காரணமாகத்தான் நம்மால் நடக்க முடிகிறது. வாகனங்களின் சக்கரங்களுக்கும், சாலையின் பரப்பிற்கும் இடையே ஏற்படும் உராய்வு விசையின் காரணமாகத்தான் வாகனங்களால் இயங்கமுடிகிறது.

சக்கரத்தடை அமைப்புகளில் (braking systems) உராய்வு மிக முக்கியப் பங்காற்றுகிறது. நாம் முற்பகுதியில் கற்றவாறு இரண்டு பரப்புகளுக்கு இடையே சார்பியக்கம் நிகழும்போது அங்கு உராய்வு விசை ஏற்படுகிறது.

தொழிற்சாலைகளில் உள்ள கனரக இயந்திரங்களின் பரப்புகள் ஒன்றுடன் ஒன்று சார்பியக்கத்தில் உள்ளபோது உராய்வு ஏற்பட்டு வெப்ப வடிவில் ஆற்றல் இழக்கப்படுகிறது. இதனால் கனரக இயந்திரங்களின் செயல் திறன் குறைந்து விடுகிறது. இவ்வாறு ஏற்படும் இயக்க உராய்வினை குறைப்பதற்காக உயவு எண்ணெய்கள் (lubricants) எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை படம் 3.34 விளக்குகிறது.

உயவு எண்ணெயைப் பயன்படுத்தி இயக்க உராய்வினைக் குறைத்தல்

பந்து தாங்கி அமைப்பு (Ball bearings) இயந்திரங்களில் இயக்க உராய்வைக் குறைப்பதில் பெரும்பங்காற்றுகின்றன. இது படம் 3.35 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இரண்டு பரப்புகளுக்கு நடுவே பந்து தாங்கி அமைப்பைப் பொருத்துவதன் மூலமாக இரண்டுபரப்புகளின் சார்பியக்கம் நடைபெறும் நேர்வகளில் இயக்க உராய்வினை முழுவதுமாக தடுத்து உருளுதலின் உராய்வு மட்டுமே பந்து தாங்கி அமைப்பினால் ஏற்படுகிறது. நாம் முற்பகுதியில் கற்றவாறு உருளுதலின் உராய்வு, இயக்க உராய்வை விட மிகக் குறைவு. எனவே இயந்திரங்களின் தேய்மானத்தைக் குறைத்து பந்து உருளை அமைப்பு அவற்றை நீண்ட காலத்திறக்கு இயங்க வைக்கிறது.

நியூட்டன் மற்றும் கலிலியோ வாழ்ந்த காலகட்டத்தில் உராய்வு விசையானது, புவியீர்ப்பு விசை போன்றதொரு இயற்கை விசை என்று நம்பப்பட்டது. ஆனால் இருபதாம் நூற்றாண்டில், அணுக்கள், எலக்ட்ரான்கள் மற்றும் புரோட்டான்கள் போன்றவற்றைப் பற்றிய அறிவு, உராய்வு விசை பற்றிய புரிதலை மாற்றியமைத்து. உராய்வு விசையானது உண்மையில் சார்பியக்கத்திலுள்ள இரண்டு பரப்புகளின் அணுக்களுக்கிடையேயான மின்காந்தவிசையாகும். நன்கு வழுவழுப்பாக்கப்பட்ட பரப்புகளும் மீநுண்ணளவில் (microscopic level) மேடு பள்ளங்களைப் பெற்றுள்ளன. இதனை படம் 3.36 விளக்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு:

பொருளொன்று மாறாத் திசைவேகத்தில் கிடைத்தளப் பரப்பில் இயங்குகின்றது எனக் கருதுக. வெளிப் புறவிசை அப்பொருளின் மீது செயல்பட்டு அதனை மாறாத் திசைவேகத்தில் இயக்கினால், அப்பொருளின் மீது செயல்படும் தொகுபயன் விசையின் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

பொருள் மாறாத் திசைவேகத்தில் இயங்கும்போது அப்பொருளின் முடுக்கம் சுழி. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி பொருளிம்மீது எவ்விதமான தொகுபயன் விசையும் செயல்படவில்லை. வெளிப்புற விசையானது இயக்க உராய்வினால் சமன் செய்யப்படுகிறது.

வட்ட இயக்கத்தின் இயக்க விசையியல்

முற்பகுதியில் நியூட்டனின் விதிகளைப் பயன்படுத்தி பொருட்களின் நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தை எவ்வாறு பகுப்பாய்வு செய்வது என்று அறிந்து கொண்டோம். இதே போன்று நியூட்டனின் விதிகளை வட்டஇயக்கத்திற்கு எவ்வாறு பயன்படுத்தவது என்று அறிந்து கொள்வதும் அவசியமாகும்.

ஏனெனில் வட்ட இயக்கம் நம் வாழ்க்கையில் தவிர்க்க முடியாத ஒன்றாகும். புறவிசை செயல்பட்டாலும் அல்லது செயல்படாவிட்டாலும் ஒரு பொருளானது நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தை மேற்கொள்ளலாம். ஆனால் பொருளின்மீது விசை செயல்பட்டால் மட்டுமே வட்ட இயக்கத்திற்க நியூட்டனின் முதல் விதி என்ற ஒன்று இல்லை. அதாவது பொருளின்மீது விசை செயல்படாமல் அப்பொருளினால் வட்ட இயக்கத்தை மேற்கொள்ள இயலாது. பொருளின்மீது செயல்படும் விசை அப்பொருளின் திசைவேகத்தை மூன்று வழிகளில் மாற்றியமைக்கும்.

1. திசைவேகத்தின் திசையை மாற்றாமலேயே அதன் எண்மதிப்பை மட்டும் மாற்றுவது. இந்நிகழ்வில் துகள் ஒரே திசையில் முடுக்கத்துடன் இயங்கும்.

எடுத்துக் காட்டுகள்

செங்குத்தாகக் கீழே விழும் பொருள், முடுக்கத்துடன் நேரான சாலையில் செல்லும் வாகனம்

2. திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பை (வேகம்) மாற்றாமல் அதன் திசையை மட்டும் மாற்றுவது. இவ்வாறு இயங்கும் இயக்கதை நாம் சீரான வட்ட இயக்கம் என்று அழைக்கிறோம்.

3. திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு (வேகம்) மற்றும் திசை இவ்விரண்டிலும் மாற்றம் ஏற்பட்டால் வட்டமற்ற இயக்கம் ஏற்படும் (Non circular motion) எடுத்துக்காட்டுகள்

ஊஞ்சல், தனி ஊசல், நீள் வட்டப்பாதையில் சூரியனைச் சுற்றி வரும் கோள்களின் இயக்கம் போன்றவை.

இப்பிரிவின் சீரான வட்ட இயக்கம் மற்றும் சீரற்ற வட்ட இயக்கங்களைப் பற்றி அறியலாம்.

மையநோக்கு விசை:

துகளொன்று சீரான வட்டப்பாதையில் சுற்றி வரும்போது வட்டமையத்தை நோக்கி வட்டப்பாதையின் ஆரம் வழியாக மையநோக்கு முடுக்கம் ஏற்படும். நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி முடுக்கம் ஏற்பட்டால் நிலைமைக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து துகளின்மீது ஒரு விசை செயல்பட வேண்டும். அவ்வாறு துகளின் மீது செயல்படும் விசையே மையநோக்கு விசை எனப்படும்.

அலகு 2 இல் நாம் கற்றபடி, வட்டப்பாதையில் இயங்கும் துகளின் மீது செயல்படும் மையநோக்கும் முடுக்கம் $a = \frac{v^2}{r}$ ஆகும். இம்முடுக்கம் வட்டமையத்தை நோக்கிச் செயல்படுகிறது. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி, மையநோக்கு விசை

$$F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_{cp} = \frac{\frac{1}{4}\times(2)^2}{3} = 0.333N.$$

$$a_m = \omega^2 R_m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$R_m = 60R = 60\times 6.4\times 10^6 = 384\times 10^6\, m$$

இங்கு மையநோக்கு விசை என்பதன் பொருள், துகள் வட்டப்பாதையில் எங்கு இருப்பினும் அதன் முடுக்கம் எப்போதும் மையத்தை நோக்கியே இருக்கும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

வெக்டர் குறியீட்டின் படி $\vec{F}_{cp} = -\frac{mv^2}{r}\hat{r}$

சீரான வட்ட இயக்கத்திற்கு $\vec{F}_{cp} = -m\omega^2 r\hat{r}$

இங்கு-$\hat{r}$ இன் திசை வட்ட மையத்தை நோக்கிக் குறிக்கிறது. மேலும் இதுவே மையநோக்கு விசையின் திசையைக் குறிக்கிறது. இதுபடம் 3.38 இல் தெளிவாக குறிப்பிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மையநோக்குவிசை, புவியீர்ப்பு விசை அல்லது சுருள்வில் விசை போன்ற ஒரு இயற்கை விசையல்ல என்பதை இங்கு கவனிக்க வேண்டும். மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு விசை என்றே

அடைக்கப்படுகிறது. புவியீர்ப்பு விசை, கயிற்றின் இழுவிசை, உராய்வு விசை, கூலும் விசை போன்ற ஏதேனும் ஒரு விசையே மையநோக்கு விசையாகச் செயல்படுகிறது.

1. மெல்லிய கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டி சுழற்றப்படும் கல்லின் இயக்கத்தில், கயிற்றின் இழுவிசையே மையநோக்கு விசையாகச் செயல்படுகிறது. பொழுதுபோக்குப் பூங்காக்களில் இயக்கப்படும் இராட்டினம் போன்ற சுழற்சி இயக்கத்தில், இராட்டினத்தைத் தாங்கம் இரும்புக் கம்பிகளின் இழுவிசை மையநோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

2. புவியினைச் சுற்றி வரும் செயற்கைக் கோளின் இயக்கத்தில், புவி, செயற்கைக் கோளின் மீது செலுத்தும் புவியீர்ப்பு விசையே மையநோக்கு விசையாகச் செயல்படுகிறது. செயற்கைக்கோள் இயக்கத்திற்கு நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை கீழ்காணுமாறு எழுதலாம்

F = புவிஈர்ப்பு விசை $= \frac{mv^2}{r}$

இங்கு r என்பது புவியின் மையத்திலிருந்து செயற்கைக்கோள் உள்ள தொலைவு

m – என்பது செயற்கைக்கோளின் நிறை

v – என்பது செயற்கைக் கோளின் வேகம்

3. கார் ஒன்று வட்டவடிவப்பாதையில் செல்லும் போது, மையநோக்கு விசையானது காரின் டயருக்கும், சாலைக்கும் இடையே ஏற்படும் உராய்வு விசையினால் ஏற்படுகிறது.

வட்ட வடிவப்பாதையில் செல்லும் கார்

இந்நிகழ்விற்கான நியூட்டன் இரண்டாம் விதியை கீழ்க்காணுமாறு எழுதாலம்

உராய்வு விசை $= \frac{mv^2}{r}$

m – என்பது காரின் நிறை

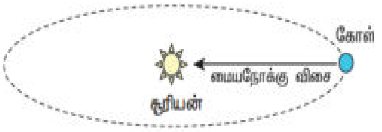
v – என்பது காரின் வேகம்

r – என்பது பாதையின் வளைவு ஆரம்

கார்வளைவுப் பாதையில் செல்லும் போதும், மையநோக்கு விசையைப் பெறுகிறது. காரின் டயருக்கும், சாலைக்கும் இடையே ஏற்படும் உராய்வு விசையினால் இம்மையநோக்கு விசை ஏற்படுகிறது. இது படம் 3.41 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

காரின் டயருக்கும், சாலைக்கும் இடையே ஏற்படும் உராய்வு விசையினால் ஏற்படும் மையநோக்கு விசை

4. கோள்கள் சூரியனைச் சுற்றி வரும்போது அவை சூரியனின் மையத்தை நோக்கிய, ஒரு மையநோக்கு விசையைப் பெறுகின்றன. இங்கு கோள்களின் மீதான சூரியனின் ஈர்ப்பு விசை, மையநோக்கு விசையாகச் செயல்படுகிறது. இது படம் 3.42இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



சூரியனின் ஈர்ப்பு விசையினால் சூரியனைச் சுற்றிவரும் கோளின் மீது ஏற்படும் மையநோக்கு விசை

இந்நிகழ்விற்கான நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை பின்வருமாறு எழுதலாம்

கோள்களின் மீது சூரியனின் ஈர்ப்புவிசை $= \frac{mv^2}{r}$

எடுத்துக்காட்டு:

0.25 kg நிறையுடைய கல் ஒன்று கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்டு $2ms^{-1}$ வேகத்தில் 3m ஆரமுடைய சீரானவட்ட இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது. கல்லின் மீது செயல்படும் இழுவிசையினைக் கண்டுபிடி

தீர்வு:

$$F_{cp} = \frac{\frac{1}{4}\times(2)^2}{3} = 0.333N$$

எடுத்துக்காட்டு

நிலா, புவியினை வட்டப்பாதைக்கு ஒத்த ஒரு பாதையில் 27.3 நாட்களில் முழுமையாகச் சுற்றி வருகிறது. புவியின் ஆரம் $6.4\text{x}10^6$ m எனில் நிலாவின் மீது செயல்படும் மையநோக்கு முடுக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு

மையநோக்குமுடுக்கம் $a = \frac{v^2}{r}$ இச் சமன்பாடு வெளிப்படையாகவே நிலவின் வேத்தைச் சார்ந்தது. இந்த வேகத்தை கணக்கிடுவது சுற்றுக் கடினமாகும். எனவே நாம் பின்வரும் சமன்பாட்டினைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\omega^2 R_m = a_m$$

இங்கு a_m என்பது புவியின் ஈர்ப்பு விசையினால், நிலா பெறும் மைய நோக்கு முடுக்கமாகும்.

ω என்பது கோணத் திசைவேகம்

R_m என்பது புவியிலிருந்து நிலா வரை உள்ள தொலைவு. இது புவியின் ஆரத்தைப் போன்று 60 மடங்காகும்.

$$R_m = 60R = 60\times 6.4\times 10^6 = 384\times 10^6 m$$

நாமறிந் படி கோணத் திசைவேகம் $\omega = \frac{2\pi}{T}$

மேலும் T =27.3 நாட்கள் =27.3x24x60x60

=2.358 x 10^6s

இம்மதிப்புகளை முடுக்கச் சமன்பாட்டில் பிரதியிடும் போது $a_m = \omega^2 R_m$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_m$$

$$= \frac{4\pi^2}{T^2} R_m$$

$$a_m = \frac{\left(4\pi^2\right)\left(384\times10^6\right)}{\left(2.358\times10^6\right)} = 0.00272 ms^{-2}$$

புவியை நோக்கி நிலாவின் மையநோக்கு முடுக்கம் $0.00272 ms^{-2}$

சரி சமமான வட்டச் சாலையில் செல்லும் வாகனம்:

வாகனமொன்று வளைவுப்பாதையில் செல்லும் போது, அவ்வாகனத்தின் மீது மையநோக்கு விசை செயல்படுகிறது. வாகனத்தின் டயர் மற்றும் சாலையின் மேற்பரப்பு இவற்றிற்கிடையேயான உராய்வு விசையின் காரணமாக இம்மையநோக்குவிசை ஏற்படுகிறது. m நிறையுடைய வாகனமொன்று r ஆரமுடைய வட்டவடிவப் பாதையில் v வேகத்தில் இயங்குகிறது எனில், அவ்வாகனத்தின் மீது மூன்று விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை படம் 3.34 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

1) கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவிஈர்ப்புவிசை (mg)
2) மேல் நோக்கிச் செயல்படும் செங்குத்துவிசை N
3) சாலையின் கிடைத்தளப் பரப்பின் வழியே உள்நோக்கிச் செயல்படும் உராய்வு விசை (F_S)

சாலை கிடைத்தளமாக இருப்பின், செங்குத்து விசையும், புவியீர்ப்பு விசையும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் மற்றும் எதிரெதிராக இருக்கும். வாகனத்தின் டயருக்கும், சாலையின் பரப்பிற்கும் இடையே ஏற்படும் உராய்வு விசை தேவையான மையநோக்கு விசையை அளிக்கிறது. இம்மையநோக்கு விசை வட்டச்சாலையின் மையத்தை நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

சரி சமமான வட்டப்பாதையில் செல்லும் வாகனத்தின் மீது செயல்படும் விசைகள் நாம் முற்பகுதியில் கற்றபடி, நிலை உராய்வுவிசை சுழி முதல் பெரும மதிப்பு விசை வரை எந்த மதிப்பையும் பெறலாம். எனவே இங்கு இரண்டு நிபந்தனைகள் சாத்தியமாகிறது:

a. வாகனம் சறுக்காமல் வளைவதற்கான

நிபந்தனை $\frac{mv^2}{r} \le \mu_s mg$,

அல்லது $\mu_s \ge \frac{v^2}{rg}$ அல்லது $\sqrt{\mu_s rg} \ge v$

(பாதுகாப்பாக வளைத்தல்)

வளைவுச்சாலையில், வாகனம் வளைவதற்குத் தேவையான மைநோக்கு விசையை நிலை உராய்வு கொடுக்கிறது. எனவே வாகனத்தின் டயர் மற்றும் சாலையின் பரப்பு இவற்றிற்கிடையேயான நிலை உராய்வுக் குணகம் வாகனம் சறுக்காமல் வளைவுப்பாதையில் வளைவதற்கான பெருமவேகத்தை நிர்ணயிக்கிறது.

b. வாகனம் சறுக்குவதற்கான நிபந்தனை

$\frac{mv^2}{r} > \mu_s mg$, அல்லது $\mu_s < \frac{v^2}{rg}$ (சறுக்குதல்)

வாகனம் வளைவதற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையை நிலை உராய்வுவிசையினால் கொடுக்க இயலவில்லை எனில், வாகனம் சறுக்கத் தொடங்கும்

எடுத்துக்காட்டு:

ஆரம் 10 m மற்றும் நிலை உராய்வுக் குணகம் 0.81 கொண்ட சரிசமமான வட்டவடிவச் சாலை ஒன்றைக் கருதுக. அச்சாலையின் மூன்று கார்கள் (A,B மற்றும் C) முறையே 7 ms^{-1}, 8 ms^{-1}, 10 ms^{-1} வேகத்தில் செல்கின்றன. இவற்றுள் எந்த கார் வட்ட வடிவச்சாலையில் செல்லும் போது சறுக்கி விழும்? ($g=10\ ms^{-2}$)

தீர்வு

சரி சமமான வட்டச்சாலையில் செல்லும் வாகனம் சறுக்காமல் இருக்கத் தேவையான நிபந்தனை, வாகனத்தின் வேகம் (v) இன் மதிப்பு $\sqrt{\mu_s rg}$ ஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்க வேண்டும்.

$$v \leq \sqrt{\mu_s rg}$$

$$\sqrt{\mu_s rg} = \sqrt{0.81 \times 10 \times 10} = 9ms^{-1}$$

c. காரினைப் பொருத்தவரை $\sqrt{\mu_s rg}$ இன் மதிப்புகாரின் வேகம் v ஐ விடக் குறைவு. கார் A மற்றும் B இரண்டும் பாதுகாப்பாக வளையும், ஆனால் கார் C இன் வேகம், நிர்ணயிக்கப்பட்ட வேகத்தை விட ($\sqrt{\mu_s rg}$) அதிகமாக உள்ளதால் அது சறுக்கி விடும்.

வெளிவிளிம்பு உயர்த்தப்பட்ட சாலை

சரிசமமான வட்டச் சாலையில், வாகனங்கள் சறுக்கி விபத்துக்குள்ளாவது, சாலைப் பரப்பின் நிலை உராய்வுக் குணகத்தை சார்ந்திருக்கிறது. இந்த நிலை உராய்வுக் குணகத்தின் பெரும மதிப்பு பரப்பின் தன்மையைச் சார்ந்ததாகும். இதன் காரணமாக வாகனங்களுக்கு ஏற்படும் விபத்தினைத் தடுப்பதுற்காகச் சாலையின் வெளிவிளிம்பு உட்புற விளிம்பை விட சற்றே உயர்த்தி அமைக்கப்பட்டிருக்கும். இதற்கு வெளிவிளிம்பு உயர்த்தப்பட்ட சாலை (banking of tracks) என்று பெயர். வெளிவிளிம்பு உயர்த்தப்பட்டிருப்பதால் இது ஒரு சாய்தளம் போன்று அமையும். கிடைத்தளப் பரப்புடன் இந்தச் சாய்தளம் ஏற்படுத்தும் கோணம் வெளி விளிம்புக் கோணம் (banking angle) எனப்படும்.

கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தில் உள்ள சாலையின் பரப்பைக் கருதுக. செங்குத்துவிசை, செங்குத்து அச்சுடன் இதே θ கோணத்தை ஏற்படுத்தும். இச்சாலையில் செல்லும் கார் ஒன்று வளையும்போது அதன் மீது இரண்டு விசைகள் செயல்படும்.

அ. கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை (mg)

ஆ. சாலையின் பரப்பிற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் செங்குத்து விசை (N)

செங்குத்து விசை N ஐ இரண்டு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். இவை $N\cos\theta$ மற்றும் $N\sin\theta$ ஆகும். இவை படம் 3.44 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. $N\cos\theta$ கூறு, கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் புவியிர்ப்பு விசையை (mg) சமன் செய்கிறது. $N\sin\theta$ கூறு தேவையான மையநோக்கு விசையைக் கொடுக்கிறது.

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளை அமைக்கலாம்

$$N \cos\theta = mg$$

$$N \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் வருக்கும் போது $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ எனக் கிடைக்கும்

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

வெளி விளிம்புக் கோணம் மற்றும் சாலையின் வளைவு ஆரம் (r) இவ்விரண்டும் வளைவுச் சாலையில் பாதுகாப்பாக வாகனங்களை இயக்க வேண்டிய வேகத்தை (v) தீர்மானிக்கின்றன. வாகனம் ஒன்றின் வேகம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட வேகத்தைவிட அதிக வேகத்தில் செல்லும் போது சாலையின் வெளிப்புறத்தை நோக்கி சறுக்கத் தொடங்கும். ஆனால் உராய்வு விசை செயல்பட்டு கூடுதல் மையநோக்கு விசையினைக் கொடுத்து வெளிப்புறச் சறுக்குதலைத் தடுக்கும். அதே நேரத்தில் காரின் வேகம் நிர்ணயிக்கப்பட்ட வேகத்தை விட குறைவாக இருப்பின் கார் உட்புறத்தை செயல்பட்டு மையநோக்கு விசையைக் குறைத்து உட்பறத்தை நோக்கி சறுக்குவதைத் தடுக்கும். இருப்பினும் காரின் வேகம் மிக அதிகம் எனில் உராய்வு விசையினால் கார் சறுக்குவதைத் தடுக்க முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு

20 m ஆரமுடைய வட்டச்சாலையைக் கருதுக. அதன் வெளிவிளிம்புக் கோணம் 15° என்க. அச்சாலையில் செல்லும் வாகனம் நழுவி விழாமல் பாதுகாப்பாக வளைவதற்குத் தேவையான வேத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$$v = \sqrt{(rg\tan\theta)} = \sqrt{20 \times 9.8 \times \tan 15^\circ}$$

$$= \sqrt{20 \times 9.8 \times 0.26} = 7.1 ms^{-1}$$

சறுக்கி வழாமல் பாதுகாப்பாக வளைவதற்குத் தேவையான வேனம் $= 7.1 ms^{-1}$

மையவிலக்கு விசை

வட்ட இயக்கத்தை இருவேறு குறிப்பாயங்களைப் பொருத்து ஆய்வு செய்யலாம். அவற்றுள் ஒன்று நிலைமக் குறிப்பாயமாகும். இக்குறிப்பாயம் ஓய்வுநிலை அல்லது சீரான இயக்கநிலை இவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு நிலையில் இருக்கும். இங்கு இயக்கத்தில் உள்ள பொருட்கள் நியூட்டனின் இயக்க விதிகளுக்கும் கட்டுப்பட்டு இயங்கும். மற்றொரு குறிப்பாயம் முடுக்கமடைகின்ற, நிலைமமற்ற குறிப்பாயமான சுழற்சிக் குறிப்பாயமாகும். (rotational frames). வட்ட இயக்கத்தினை இவ்விரு குறிப்பாயங்களைப் பொருத்து வெவ்வேறு கண்ணோட்டத்தில் ஆய்வு செய்யலாம். சுழற்சிக் குறிப்பாயத்தில் நியூட்டனின் முதல் விதி மற்றும் இரண்டாம் விதியைப் பயன்படுத்தும் போது ஒரு போலியான விசையை (Pseudo force) சேரத்துக் கருத வேண்டும். இந்தப் போலியான விசையே மையவிலக்கு விசையாகும். இத்தகைய மையவிலக்கு விசை சுழற்சிக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து பொருளின் மீது செயல்படும். மையவிலக்கு விசையினைப் புரிந்து கொள்ள கீழ்க்கண்ட விளக்கம் பெரிதும் துணை புரியும்.

மெல்லிய கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டு சுழற்சி இயக்கத்தை மேற்கொள்ளும் கல் ஒன்றைக் கருதுவோம். ஓய்வுநிலையிலுள்ள நிலைமக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து கல்லின் கோணத் திசைவேகம் ω என்க. ω கோணத் திசைவேகத்தில் கல்லுடன் சேர்ந்து சுழற்சி இயக்கத்திலுள்ள மற்றொரு குறிப்பாயத்திலிருந்து கல்லினைப் பாரக்கும்போது அக்கல் ஓய்வுநிலையில் இருப்பது போன்று தோன்றும்

சுழற்சிக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து, வட்டமையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் மைநோக்கு விசையான $-m\omega^2 r$ உடன், அதற்குச் சமமான எதிர்திசையில் வெளிநோக்கிச் செயல்படும் $+m\omega^2 r$ என்ற விசை கல்லின் மீது செயல்படுகிறது. எனவே சுழற்கி இயக்கத்திலுள்ள குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து கல்லின் மீது செயல்படும் தொகுபயன் விசை சுழியாகும் என்பதை இது காட்டுகிறது. $(-m\omega^2 r + m\omega^2 r = 0)$ இங்கு வெளிநோக்கிச் செயல்படும் $+m\omega^2 r$ விசைக்கு மையவிலக்கு விசை என்று பெயர்.

மையவிலக்கு என்பதன் பொருள் மையத்தை விட்டு வெளிநோக்கிச் செயல்படுவது என்பதாகும். சுழற்சிக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து கல்லின் சுழற்சி இயக்கத்தை ஆய்வு செய்யும்போது மட்டும் மையவிலக்கு விசை கல்லின் மீது செயல்படுவதாகத் தோன்றும். இக்காரணத்தினால் விசை என்று அழைக்கிறோம். இப்போலியான விசை எந்த மூலத்திலிருந்தும் தோன்றுவதில்லை (வை ஈயள ழசபைெ). இங்கு போலி விசை தோன்றுவதற்கான காரணம், நாம் கருதும் சுழற்சி குறிப்பாயம் ஒரு நிலைமமற்ற குறிப்பாயம் என்பதாலே ஆகும்.

நிலைமக் குறிப்பாயத்தைப் பொருத்து கல்லின் சுழற்சி இயக்கத்தை ஆய்வு செய்யும்போது மையநோக்கு விசை மட்டுமே செயல்படும். இம்மையநோக்கு விசை கல் கட்டப்பட்டிருக்கும் மெல்லிய கயிற்றின் இழுவிசையால் பெறப்படுகிறது. சுழற்சி குறிப்பாயத்தை பொருத்து சுழற்சி இயக்கக் கணக்குகளைத் தீர்வு செய்ய வரையப்படும் தனித்த பொருளின் விசைப்படங்களில் படம் 3.45 இல் உள்ளவாறு மையவிலக்கு விசை கண்டிப்பாகக் காட்டப்பட வேண்டும்.

மைய விலக்கு விசையின் விளைவுகள்

மையவிலக்கு விசை ஒரு போலியான விசையாக இருப்பினும் அதன் விளைவுகள் உண்மையாகும். கார் ஒன்று வளைவுப்பாதையில் திரும்பும்போது, காரின் உள்ளே அமர்ந்திருப்பவர் ஒரு வெளிப்புறவிசையை உணர்வார். அவ்விசை அவரை வெளிநோக்கித் தள்ளும். இவ்வெளிநோக்கிய விசையையும் மையவிலக்கு விசை என்றே அழைக்கலாம். காரின் இருக்கைக்கும், அமர்ந்திருக்கும் நபருக்கும் இடையே உள்ள போது மான உராய்வுவிசை இருந்தால் அவர் வெளியே தள்ளப்படுவது தவிர்க்கப் படுகிறது.

நேரக்கோட்டுப் பாதையில் சென்று கொண்டிருக்கும் கார் ஒன்று திடீரென்று தன்பாதையிலிருந்து வளையும்போது, காரின் உள்ளே நிலையாகப் பொருத்தப்படாத பொருள், திசையில் நிலைமப் பண்பின் (Inertia of direction) காரணமாக நேர்க்கோட்டுப் பாதையிலேயே தொடர்ந்து இயங்க முயற்சிக்கும்.

மையவிலக்கு விசையின் விளைவு

இவ்வியக்கத்தை நிலைமக் குறிப்பாயத்திலிருந்து பாரக்கும் போது படம்3.46 இல் காட்டியுள்ளவாறு நேர்கோட்டு இயக்கமாதத் தெரியும். ஆனால் சுழற்சிக் குறிப்பாயத்திலிருந்து பார்க்கும்போது இயக்கம் வெளிநோக்கிச் செல்வது போன்று தோன்றும்.

சுழலும் மேடையில் நின்று கொண்டிருக்கும் நபர் வெளிப்புற மையவிலக்கு விசையை உணரவாார். இதன் காரணமாக மேடையிலிருந்து அவர் வெளியே தள்ளப்பட வாய்ப்பு அதிகம். நின்று கொண்டிருக்கும் நபருக்கும், மேடைக்குமான உராய்வுவிசை வெளிநோக்கித் தள்ளப்படும் விசையினைச் சமன் செய்யப் போதுமானதல்ல. இதனைத் தவிர்ப்பதற்காக மேடையின் வெளிப்புற விளிம்பு சற்றே மேல்நோக்கி உயர்த்தப்பட்டிருக்கும். இவ் உயர்வு நின்று கொண்டிருக்கும் நபரின் மீது ஒரு செங்குத்து விசையைச் செலுத்தி அவர் வெளியே விழுவதைத் தடுக்கும். இது படம் 3.47 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

புவியின் சுழற்சியால் ஏற்படும் மையவிலக்கு விசை

புவியினை ஒரு நிலைமக் குறிப்பாயமாகக் கருதினாலும் உண்மையில் அவ்வாறு இல்லை. புவி ωஎன்ற கோணத் திசைவேகத்தில் தன் அச்சினைப் பொருத்து தன்னைத்தானே சுற்றி வருகிறது. புவிப்பரப்பிலுள்ள எந்த ஒரு பொருளும் (சுழற்சிக் குறிப்பாயத்தில் உள்ள பொருள்) மையவிலக்கு விசையை உணரும். இம்மையவிலக்கு விசை சுழல் அச்சிலிருந்து மிகச் சரியாக எதிர் திசையில் செயல்படுவதாகத் தோன்றும். இது படம் 3.48 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது

புவிப்பரப்பில் நின்று கொண்டிருக்கும் மனிதரின் மையவிலக்கு விசை $F_{cf} = m\omega^2 r$

இங்கு r என்பது சுழல் அச்சிற்கும் மனிதனுக்கும் இடையே உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு. படம் 3.48 இல் காட்டப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து தொலைவு $r = R\cos\theta$.

இங்கு R என்பது புவியின் ஆரம்.

மேலும் θ என்பது மனிதன் நின்று கொண்டிருக்கும் புள்ளியில் புவியின் குறுக்குக் கோடு (latitude) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

சென்னையிலுள்ள 60 kg நிறையுடைய மனிதரின் மீது செயல்படும் மையவிலக்கு விசையைக் காண்க

(கொடுக்கப்பட்டவை: சென்னையில் குறுக்குக் கோடு $\theta = 13^\circ$)

தீர்வு

மையவிலக்கு விசை $F_{cf} = m\omega^2 R\cos\theta$

புவியின் கோணத் திசைவேகம் (ω) $= \frac{2\pi}{T}$

இங்கு வு எனப்து புவியின் அலைவு நேரம் (24 மணிநேரம்)

$$\omega = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = \frac{2\pi}{86400}$$
$$= 7.268\times 10^{-5}\, rad\, \sec^{-1}$$

புவியின் ஆரம் R = 6400 km =6400x10^{3}m

சென்னையின் குறுக்கு கோடு (Latitude) =13°

$$F_{cf} = 60\times(7.268\times 10^{-5})^2 \times 6400\times 10^3$$
$$\times\cos(13^\circ) = 1.9678N$$

60 kg நிறையுடைய மனிதரொருவர் உணரும் மையவிலக்குவிசை தோரயமாக 2 நியூட்டனாகும். ஆனால் புவியின் ஈர்ப்பு விசையின் காரணமாக 60 kg நிறையுடைய அம்மனிதர் உணரும் விசை = mg = 60 x 9.8 = 588 N. இந்த விசையைவிலக்கு விசையை விட மிக அதிகம்.

மையநோக்கு விசை மற்றும் மையவிலக்கு விசை – ஓர் ஒப்பீடு:

மையநோக்கு விசை மற்றும் மையவிலக்கு விசை ஆகியவற்றில் சிறப்புக் கூறுகள் அட்டவணை 3.4 இல் ஒப்பிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

மையநோக்கு விசை மற்றும் மையவிலக்கு விசை இவற்றின் சிறப்புக் கூறுகள்	
மையநோக்குவிசை	மையவிலக்குவிசை
புவியீர்ப்புவிசை, கம்பியன் இழுவிசை, செங்குத்துவிசை போன்ற புளவிசைகளினால் பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் உண்மை	இது போலியான அல்லது பொய்யான விசையாகும். இவ்விசை புவியீர்ப்பு விசை, இழுவிசை, செங்குத்து விசை போன்ற புற

விசையாகும்	விசைகளினால் தோன்றாது.
நிலைம மற்றும் நிலைம மற்ற குறிப்பாயங்கள், இரண்டிலும் இவ்விசை செயல்படும்	நிலைமமற்ற சுழலும் குறிப்பாயங்களில் மட்டுமே இவ்விசை செயல்படும்
சுழல் அச்சினை நோக்கிச் செயல்படும் வட்டப்பாதை இயக்கத்தில் வட்டத்தின் மையத்தை நோக்கி செயல்படும் $\left\|F_{cp}\right\| = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$	சுழல் அச்சிலிருந்து வெளிநோக்கிச் செயல்படும். மேலும் வட்ட இயக்கத்தில் வட்டமையத்திலிருந்து ஆரத்தின் வழியே வெளிநோக்கிச் செயல்படும் $\left\|F_{cf}\right\| = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$
இது ஒரு உண்மையான விசை. இதன் விளைவுகளும் உண்மையானவை	இது ஒரு போலிவிசை. ஆனால் இதன் விளைவுக்ள உண்மையானவை.
இரண்டு பொருட்களுக்கிடையேயான உறவே (interation) மையநோக்கு விசைக்கு அடிப்படையாக அமைகிறது	ஒரு பொருளின் நிலைமத் தன்மையே (inertial property) மையவிலக்கு விசைககு அடிப்படையாக அமைகிறது. இவ்விசை பொருட்களுக்கிடையேயான உறவால் (interaction) தோன்றாது. நிலைமக் குறிப்பாயம் ஒன்றில் இயங்கும் பொருளின் நிலைம இயக்கம் தான், சுழற்சிக் குறிப்பாயத்தில் மையவிலக்கு விசையாகத் தோன்றுகிறது.
நிலைமக் குறிப்பாயத்தில் தனித்தபொருளின் விசைப்படம் வரையும்போது, மையநோக்கு விசையை குறிப்பிட வேண்டும்.	நிலைமக் குறிப்பாயத்தில் மையவிலக்கு விசை இல்லை சுழலும் குறிப்பாயத்தில், மையநோக்கு விசை மற்றும் மையவிலக்குவிசை இரண்டையும் தனித்த பொருளின் விசைப்படத்தில் குறிப்பிட வேண்டும்.

11th Physics

அலகு 5 துகள்களாலான அமைப்பு மற்றும் திண்மப்பொருட்களின் இயக்கம்

அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் பயன்படுத்தும் பொருட்களில் பெரும்பாலானவை அதிக எண்ணிக்கை கொண்ட துகள்களால் ஆனதே. இதற்கு முன் உள்ள அலகுகளில் கொருட்களின் உருவ மற்றும் வடிவ அமைப்பைக் கருதாமல், அவற்றின் இயக்கத்தைப் பற்றி பயின்றோம். இதுவரை மிகப் பெரிய பொருளாக இருந்தாலும் அதை ஒரு புள்ளிப் பொருளாக (Point object) மட்டுமே கருதினோம். இந்த அலகில், பொருளின் உருவ மற்றும் வடிவ அமைப்பிற்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்க உள்ளோம். பொதுவாகவே முக்கியத்துவம் கொடுக்க உள்ளோம். பொதுவாகவே இத்தகைய பொருட்கள் அதிக அளவிலான துகள்களால் ஆனவை. ஆகவே அப் பொருள்கள் நகரும் போது அதை துகள்களால் ஆன ஒரு தொகுப்பின் ஒட்டு மொத்த இயக்கமாகவே கருதுகிறோம். இத்துகள்களால் ஆன அமைப்பினைக் கணக்கில் கொள்ளும் போது, நிறை மையம் என்ற கருத்தை நாம் வரையறுக்கலாம்.

இப்பெரிய (கனமான) பொருட்களின் மீது செயல்படும் விசைகள் அக மற்றும் புற விசைகள் என வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. பொருளின் அமைப்பிற்குள் உள்ள துகள்களுக்கிடையே செயல்படும் விசையை அகவிசை என்கிறோம். வெளிப்புறத்தில் இருந்து துகள்கள் அடங்கிய அமைப்பின் மீது செயல்படும் விசையை புற விசை எனகிறோம். இப்பகுதியில், துகள்களினால் ஆன அமைப்பகளைக் கொண்டு உருவாக்கும் திண்மப்பொருட்களைப் பற்றி படிக்க உள்ளோம். ஒரு பொருளின் மீது எத்தகைய புறவிசை செயல்பட்டாலும், அது தனது பரிமாணத்தையோ, உரு அமைப்பையோ மாற்றாமல் இருக்குமேயானால் அப்பொருள் திண்மப்பொருள் எனப்படும். அதாவது புறவிசைகள் செயல்படும்போதும் திண்மப் பொருளின் அணுவிடைத் தொலைவு மாறாது. ஆனால் நடைமுறையில் முழுமையான திண்மப் பொருள் என்பது கிடையாது. ஏனெனில் விசை செயல்படும் போது

அனைத்துப் பொருட்களுமே தனது வடிவத்தையோ அல்லது உருவ அமைப்பையோ மாற்றிக் கொள்கின்றன. இந்த அலகில் திண்மப் பொருட்களில் ஏற்படும் உருவ மாற்றத்தைப் புறக்கணிக்கத்தக்கதாக எடுத்துக்கொள்கிறோம். அலகு 7 இல் திடப்பொருட்களின் மீட்சியியல் என்ற தலைப்பின் கீழ் பொருட்களின் மீதான உருவ மாற்றத்தைப் பற்றி தனியாகப் பயில உள்ளோம்.

நிறை மையம் (CENTER OF MASS)

இயங்கும் திண்மப்பொருளொன்றில் உள்ள அனைத்து துகள்களும் ஒரே பாதையில் இயங்குவதில்லை. இயக்கத்தின் வகையைப் பொருத்து ஒவ்வொரு துகளும் வெவ்வேறான பாதையை மேற்கொள்ளும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பரப்பில் உருளும் சக்கரத்தில், மையத்தின் பாதையும், மற்ற புள்ளிகளின் பாதையும் வெவ்வேறாக இருக்கும். இந்த அலகில் திண்மப்பொருளின் இடப்பெயர்வு மற்றும் சுழல் இயக்கங்களைப் பற்றியும் இவை இரண்டும் இணைந்த இயக்கத்தைப் பற்றியும் விரிவாகப் படிக்க உள்ளோம்

திண்மப் பொருளின் நிறை மையம்

பொருளொன்று (கிரிக்கெட் மட்டை - bat) காற்றில் குறிப்பிட்ட கோணத்தில் எறியப்படும் போது நிறைமையம் செல்லும் பாதை படம் 5.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. மட்டையின் அனைத்துப் புள்ளிகளும் பரவளையப் பாதையை மேற்கொள்கின்றனவா?. உண்மையின் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டுமே பரவளைப் பாதையையும் மற்ற புள்ளிகள் வெவ்வேறு பாதையையும் மேற்கொள்ளும்.

பரவளையப் பாதையை மேற்கோள்ளும் அக்குறிப்பிட்ட புள்ளியே பொருளின் நிறை மையம் என்றழைக்கப்படுகிறது. இவ்வியக்கமானது தனித்து எறியப்பட்ட புள்ளிப்பொருளின் இயக்கத்தை அத்திருக்கும். பொருளொன்றின் ஒட்டு மொத்த நிறையும் செறிந்திருப்பதாகத் தோன்றும் புள்ளியானது பொருளின் நிறை மையம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே இப்புள்ளியானது ஒட்டு மொத்தப் பொருளையும் குறிக்கிறது.

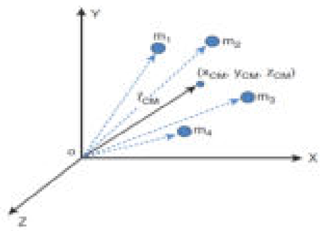
ஒழுங்கான வடிவம் மற்றும் சீரான நிறையைப் பெற்றிருக்கும் பொருட்களில் நிறைமையமானது பொருளின் வடிவியல் மையத்தில் (Geometric centre) அமைந்திருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக வட்டம் மற்றும் கோளப் பொருட்களுக்கு நிறை மையமானது அதன் மையத்திலும், சதுரம் மற்றும் செவ்வக வடிவப் பொருட்கள், கனசதுரம் மற்றம் கனசெவ்வகப் பொருட்களுக்கு அவற்றின் மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியிலும் நிறைமையம் அமைந்திருக்கும். மற்ற பொருட்களுக்குச் சில முறைகளைப் பயன்படுத்திக் காணலாம். நிறை மையமானது பொருட்களின் உள்ளேயோ அல்லது வெளியேயோ அமையலாம்.

பரவலாக அமைந்த புள்ளி நிறைகளின் நிறைமையம்

ஒரு புள்ளி நிறை என்பது எவ்வித வடிவமும் அளவும் இல்லாமல் சுழியற்ற நிறையைக் கொண்டதாக அனுமானிக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியாகும். m_1, m_2, $m_3 \ldots m_n$ என்ற n புள்ளி நிறைகளைக் கொண்ட தொகுப்பின் நிறை மையத்தைக் கண்டறிய, முதலில் நாம் ஆதிப்புள்ளியையும் தகுந்த ஆய அச்சு அமைப்பையும் தெரிவு செய்ய வேண்டும். படம் 5.2 இல் காட்டியுள்ள படி x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ ஆகியவை x அச்சில் புள்ளி நிறைகளின் ஆய அச்சு நிலைகளாகக் கருதுவோம்.

x_{cm} என்பது எல்லா புள்ளி நிறைகளின் நிறை மைய நிலையின் x ஆயத் தொலைவு எனில், அதன் சமன்பாடு

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$



படம் 5.2. பரவலாக அமைந்த புள்ளி நிறைகளின் நிறைமையம்

இங்கு, $\sum m_i$ என்பது எல்லாத் துகள்களின் மொத்த நிறை. அதாவது, M என்பது ($\sum m_i$ =M) ஆகும்.

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

இதைப்போன்றே பரவலாய் அமைந்துள்ள புள்ளி நிறைகளின் நிறை மையத்திற்கான y, z ஆயத்தொலைவுகளையும் நாம் கண்டறியலாம்.

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

ஆகவே, கார்ட்டீசியன் ஆய அச்சு அமைப்பில் இப்புள்ளி நிறைகளின் நிறை மையத்தின் நிலை (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) ஆகும். பொதுவாக, நிறைமையத்தின் நிலையை வெக்டர் வடிவிலேயே எழுதுகிறோம்.

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M}$$

இங்கு, $\dot{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$ என்பது நிறை மையத்தின் நிலை வெக்டர் ஆகும். மேலும், $\dot{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி நிறையின் நிலை வெக்டர் ஆகும். இங்கு $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ என்பவை முறையே Z, Y மற்றும் Z அச்சுகளின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள் ஆகும்.

இருபுள்ளி நிறைகளின் நிறை மையம்

நிறை மையத்திற்கான மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் மூலம், X அச்சில் முறையே x_1 மற்றும் x_2 தொலைவில் அமைந்துள்ள m_1, m_2 என்ற இரண்டு புள்ளி நிறைகளின் நிறை மையத்தைக் கண்டறிவோம். இந்நேர்வில், ஆய அச்சு அமைப்பைப் பொருத்து நிறை மையத்தின் நிலையைக் கீழ்க்கண்ட மூன்று வழிகளில் காணலாம்.

i. நிறைகள் நேர் X அச்சில் உள்ளபோது

படம் 5.3 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ளதைப் போல m_1, m_2 என்ற நிறைகள் தன்னிச்சையாக எடுக்கப்பட்ட ஆதிப்புள்ளியைப் பொருத்து நேர் X அச்சில் முறையே x_1, மற்றும் x_2 நிலைகளில் உள்ளதாக எடுத்துக் கொள்வோம். நேர் X அச்சிலேயே x_{cm} என்ற தொலைவில் அமைந்த நிறை மையத்தின் சமன்பாடானது.

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

ii. நிறைகளில் ஏதேனும் ஒன்று ஆதியுடன் ஒன்றியுள்ளபோது

படம் 5.3 (b) இல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஏதேனும் ஒரு நிறை ஆய அச்சின் ஆதிப்புள்ளியோடு ஒன்றியுள்ள போது கணக்கீடானது இன்னும் எளிதாக்கப்படுகிறது. புள்ளி நிறை m_1 ஆதிப்புள்ளியோடு ஒன்றும்போது, அதன் நிலை x_1 சுழியாகிறது அதாவது, $x_1 = 0$ எனவே,

$$X_{CM} = \frac{m_1 (0) + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

இதை மேலும் எளிதாக்கும் போது

$$X_{CM} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

iii. நிறைமையானது ஆதியுடன் ஒன்றியுள்ளபோது

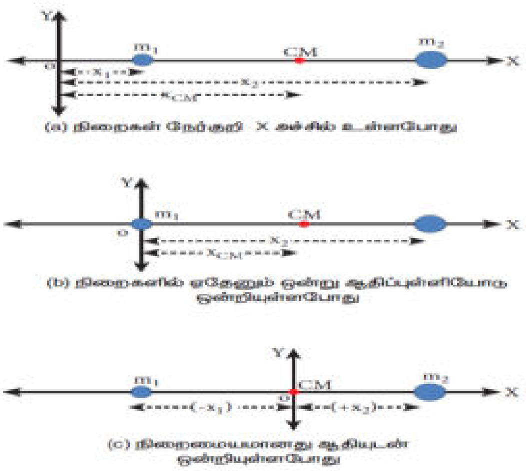
ஆய அச்சு அமைப்பின் ஆதிப்புள்ளியானது நிறை மையத்தோடு ஒன்றியுள்ள போது Xcm =0 மேலும் படம் 5.3 (c) இல் காட்டியுள்ளபடி நிறை m_1 ன் நிலையானது எதிர்குறி X அச்சில் அமையும். எனவே இதன் நிலை எதிர்குறியாக இருக்கும்.

$$0 = \frac{m_1 (-x_1) + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$0 = m_1 (-x_1) + m_2 x_{2;}$$

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சன்பாடு திருப்புதிறன்களின் தத்துவம் எனப்படுகிறது. இதைப்பற்றி பிரிவு 5.3.3 இல் விரிவாகப் பயிலலாம்.



படம் 5.3. ஆதிப்புள்ளியை நகர்த்துவதன் மூலம் இரண்டு புள்ளிநிறைகளின் நிறைமையம் கணக்கிடப்படுகிறது

எடுத்துக்காட்டு

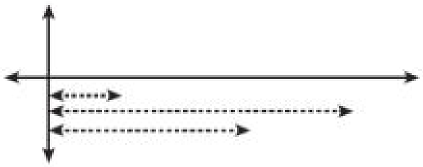
3kg, 5kg என்ற இரு புள்ளி நிறைகள் X அச்சில் ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து முறையே 4m, 8m என்ற தொலைவில் உள்ளன. இரு புள்ளி நிறைகளின் நிறை மையத்தின் நிலைகளை,

i. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்தும்
ii. 3kg நிறையிலிருந்தும் காண்க.

தீர்வு

m_1=3 kg, m = 5 kg என எடுத்துக் கொள்வோம்.

i. **ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து நிறை மையத்தைக் கண்டறிதல்**



புள்ளி நிறைகள் X அச்சில் ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $x_1 = 4m$, $x_2 = 8m$ என்ற தொலைவில் உள்ளன. எனவே நிறை மையம்.

$$X_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

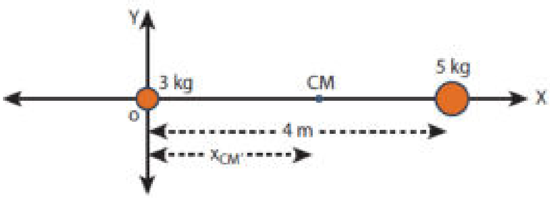
$$X_{CM} = \frac{(3\times4)+(5\times8)}{3+5}$$

$$X_{CM} = \frac{12+40}{8} = \frac{52}{8} = 6.5m$$

ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து நிறை மையம் 6.5 m தொலைவில் அமைந்திருக்கும்.

ii. 3 kg நிறையிலிருந்து நிறை மையத்தைக் கண்டறிதல்

3 kg நிறையை ஆதிப்புள்ளிக்கு X அச்சில் இடமாற்றம் செய்வதாக கொள்வோம். ஆதிப்புள்ளியானது x அச்சில் 3 kg நிறையுள்ள இடத்தில் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே 3 kg புள்ளி நிறையின் நிலை சுழியாகும் ($x_1 = 0$) மாற்றப்பட்ட ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து நிறை 4 m தொலைவில் உள்ளது. ($x_2 = 4m$)



$$X_{CM} = \frac{(3\times0)+(5\times4)}{3+5}$$

$$X_{CM} = \frac{0+20}{8} = \frac{20}{8} = 2.5m$$

3 kg புள்ளி நிறையிலிருந்து 2.5m தொலைவில் (5 kg புள்ளி நிறையிலிருந்து 1.5m தொலைவிலும்) நிறை மையம் அமைந்துள்ளது.

- இம்முடிவானது, நிறை மையம் அதிக நிறைக்கு அருகில் உள்ளதைக் காட்டுகிறது.
- ஆதிப்புள்ளி நிறைமையத்தில் அமையுமாறு கருதும்போது, திருப்புத் திறன்களின் தத்துவத்தை ஒத்து அமைகிறது.

$m_1x_1 = m_2x_2; 3\times2.5 = 5\times1.5; 7.5 = 7.5$

நிகழ்வு (i) யை (ii) உடன் ஒப்பிடும் போது 3kg நிறையின் நிறைமையத்தினை 6.5m எனவும் கண்டறியலாம் இது நிகழ்வு (i) இன் நிறைமையத்தின் நிலையிலேயே உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு

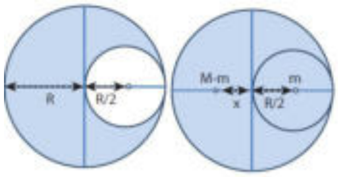
R ஆரமுடைய சீரான பரப்பு நிறை அடர்த்தி கொண்ட வட்டத்தட்லிருந்து R/2 ஆரமுறைய ஒரு சிறு தட்டு வடிவப் பகுதி படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள பகுதியின் நிறை மையத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

வெட்டப்படாத வட்டத்தட்டின் நிறையானது M என எடுத்துக் கொள்க. இதனுடைய நிறை மையமானது வட்டத்தட்டின் வடிவியல் மையத்தில் அமையும். இப்புள்ளியிலேயே ஆதிப்புள்ளியும் ஒருங்கமைகிறது.

வெட்டி எடுக்கப்பட்ட சிறு வட்டத்தட்டின் நிறை m என்க. (அதன் நிறை மையம் ஆதிப்புள்ளிக்கு) வலது புறத்தில் R/2 என்ற தொலைவில் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு அமைந்திருக்கும்

எனவே வட்டத்தட்டின் மீதமுள்ள பகுதியின் நிறை மையம் ஆதிப்புள்ளிக்கு இடது புறத்தில் X தொலைவில் உள்ளதாக எடுத்துக் கொள்வோம். திருப்புத்திறன்களின் தத்துவத்திலிருந்து, கீழ்கண்டவாறு எழுத முடியும்.



$$(M-m)X = (m)\frac{R}{2}$$

$$X = \left[\frac{m}{(M-m)}\right]\frac{R}{2}$$

பரப்பு நிறை அடர்த்தி $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ (σ என்பது ஓரலகு பரப்பின் நிறை) எனில், சிறிய வட்டத் தட்டின் நிறை (m) என்பது

m = பரப்பு நிறை அடர்த்தி x பரப்பு

$$m = \sigma \times \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$m = \left(\frac{M}{\pi R^2}\right)\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{M}{\pi R^2}\pi\frac{R^2}{4} = \frac{M}{4}$$

$$X = \frac{4}{\left(M - \frac{M}{4}\right)} \times \frac{R}{2} = \frac{\frac{M}{4}}{\left(\frac{3M}{4}\right)} \times \frac{R}{2}$$

$$X = \frac{R}{6}$$

மீதமுள்ள வட்டத் தட்டின் நிறைமையானது

வட்டத் தட்டின் மையத்திற்கு இடப்புறம் R/2 என்ற தொலைவில் இருக்கும்.

- பெரிய வட்டத்தட்டிலிருந்து பொதுவான மையத்தை (common centre) பொருத்து சிறிய பகுதி வெட்டியெடுக்கப்பட்டால் மீதமுள்ள வட்டத்தட்டின் நிறை மையம் எங்கு அமையும்?

எடுத்துக்காட்டு

10 kg, 5 kg நிறையுடைய இரு புள்ளி நிறைகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\left(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)m, \left(3\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}\right)m$ ஆகும். நிறை மையத்தின் நிலலையைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு:

$$m_1 = 10kg$$

$$m_2 = 5kg$$

$$\dot{r}_1 = \left(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)m$$

$$\dot{r}_2 = \left(3\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}\right)m$$

$$\dot{r} = \frac{m_1 \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{10(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + 5(3\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k})}{10 + 5}$$

$$= \frac{-30\hat{i} + 20\hat{j} + 40\hat{k}) + 15\hat{i} + 30\hat{j} + 25\hat{k}}{15}$$

$$= \frac{-15\hat{i} + 50\hat{j} + 65\hat{k}}{15}$$

$$\dot{r} = \left[-\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{j} + \frac{13}{3}\hat{k}\right]m$$

$\dot{r}$ என்பது நிறைமையத்தின் நிலை வெக்டரைக் குறிக்கும்

சீராகப் பரவியுள்ள நிறையின் நிறை மையம்

ஒரு பெரிய பொருளில் நிறையானது சீராக பரவியுள்ளது. எனில் அதில் ஒரு சிறிய நிறை (Δm) ஆனது புள்ளி நிறையாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. மேலும் அச்சிறிய துகள்களுடைய நிறைகளின் கூட்டுத்தொகையினைக் கொண்டு நிறைமையத்தின் ஆயத்தொலைவுகளுக்கான சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

$$x_{CM} = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}$$

மற்றொரு வகையில் அந்தச் சிறிய துகள்களின் நிறையை மீநுண் (infinitesimally small) மதிப்பாக (மிகச்சிறியது) (dm) கருதும்பொழுது கூட்டுத்தொகையை கீழ்க்கண்டவாறு தொகையீடாகக் கூறலாம்.

$$x_{CM} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$

$$y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$z_{CM} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

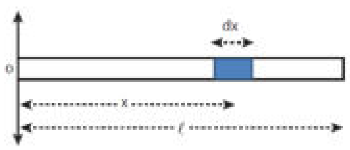
- மீநுண் மதிப்பளவு சுழியை நோக்கிச் செல்லக்கூடிய மிக மிகச் சிறய அளவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

M நிறை l நீளமும் கொண்ட சீரான நீள் அடர்த்தி கொண்ட (uniform rod) தண்டின் நிறை மையத்தைக் கண்க.

தீர்வு

M நிறையும் l நீளமும் உடைய ஒரு சீரான நீள் அடர்த்தி கொண்ட தண்டினைக் (uniform rod) கருதுக. அதன் ஒரு முனை படத்தில் காட்டியுள்ளபடி ஆதிப்புள்ளியுடன் ஒன்றியிருப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். தண்டானது x அச்சில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. தண்டினுடைய நிறை மையத்தைக் கண்டறிய, ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து x தொலைவில் dx நீளமும் dm என்ற மீநுண் நிறையும் கொண்ட சிறுபகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம்.



தண்டின் நீள் அடர்த்தி (ஓரலகு நீளத்திற்கான நிறை) $\lambda = \frac{M}{\ell}$

சிறிய பகுதியின் நிறை $dm = \frac{M}{\ell} dx$ தண்டின் நிறை மையத்திற்கான சமன்பாட்டை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$x_{CM} = \frac{\int_o^\ell x\left(\frac{M}{\ell} dx\right)}{M} = \frac{l}{\ell}\int_o^\ell x dx$$

$$= \frac{l}{\ell}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{l}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{2}\right)$$

$$x_{CM} = \frac{\ell}{2}$$

நிலை $\frac{\ell}{2}$ என்பது தண்டின் வடிவியல் மையமாகும். இதிலிருந்து சீரான தண்டினைப் பொறுத்தவரை அதன் வடிவியல் மையத்திலேயே (Gepmetric center) நிறை மையம் அமையும் என்ற முடிவிற்கு வரலாம்.

நிறை மையத்தின் இயக்கம்

ஒரு திண்மப் பொருள் இயங்கும் போது, அதன் நிறை மையமும் பொருளோடு சேர்ந்தே இயங்கும். நிறை மையத்தின் திசை வேகம் (v_{CM}) முடுக்கம் (a_{CM}) போன்ற இயக்கவியல் அளவுகளைப் பெற, நிறை மையத்தின் நிலையை தொடர் வகையீடு செய்வதன்மூலம் பெறலாம். ஏளிமையாகக் கணக்கிட, பொருள் x-அச்சில் மட்டும் இயங்குவதாகக் கருதுவோம்.

சமன்பாடு 5.5 லிருந்து

$$\dot{v}_{CM} = \frac{d\dot{x}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i\left(\frac{d\dot{x}_i}{dt}\right)}{\sum m_i}$$

$$\dot{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \dot{v}_i}{\sum m_i}$$

$$\dot{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\dot{x}_{CM}}{dt}\right) = \left(\frac{d\dot{v}_{CM}}{dt}\right) = \frac{\sum m_i\left(\frac{d\dot{v}_i}{dt}\right)}{\sum m_i}$$

$$\dot{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \dot{a}_i}{\sum m_i}$$

புறவிசைகள் இல்லாத போது, $\vec{F}_{ext} = 0$ அமைப்பின் தனித்தனியான துகள்கள் அகவிசையினால் மட்டுமே இயக்கமோ அல்லது இடப்பெயர்வோ அடையும். இது நிறைமையத்தின் நிலையை

பாதிக்காது. அதாவது புறவிசை இல்லாதபோது நிறை மையம் ஓய்வு நிலையிலோ அல்லது சீரான இயக்கநிலையிலோ இருக்கும். எனவே நிறை மையம் ஓய்வு நிலையில் இருக்கும் போது $\bar{v}_{CM}$ சுழியாகும். சீரான இயக்கத்தில் உள்ளபோது நிறைமையத்தின் திசைவேகம் மாறிலியாக இருக்கும். ($\bar{v}_{CM}$ =0 or $\bar{v}_{CM}$ =மாறிலி). இங்கே நிறை மையமானது முடுக்கத்தினைக் கொண்டிருக்காது ($\bar{a}_{CM}$ =0).

சமன்பாடு 5.7 மற்றும் 5.8 லிருந்து,

$$\dot{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \dot{v}_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\dot{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \dot{v}_i}{\sum m_i} = 0$$

இங்கு ஒவ்வொரு துகளும் அகவிசையின் காரணமாக அவற்றின் திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றன.

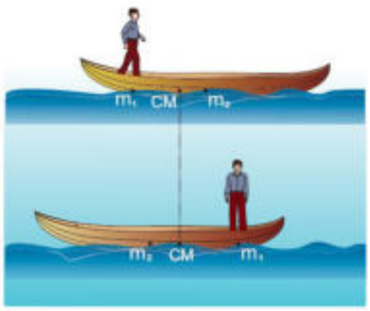
புறவிசைகள் செயல்படும்போது ($F_{ext} \neq 0$), நிறைமையத்தின் முடுக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

$$\dot{F}_{ext} = \left(\sum m_i\right)\dot{a}_{CM}\,; \dot{F}_{ext} = \dot{M}_{CM}\,; \dot{a}_{CM} = \frac{\dot{F}_{ext}}{M}$$

எடுத்துக்காட்டு

50 kg நிறையுள்ள ஒரு மனிதர் நிலையான நீரின் பரப்பில் மிதந்த கொண்டிருக்கும் 300 kg நிறையுடைய படகில் ஒரு முனையில் நின்று கொண்டிருக்கிறார். அவர் தரையில் நிலையாக உள்ள ஒருவரை பொருத்து படகின் மறுமுனையை நோக்கி $2ms^{-1}$ என்ற மாறா திசைவேகத்தில் நடந்து செல்கிறார். (a) நிலையான உற்றுநோக்குபவரை பொருத்தும் (b) படகில் நடந்து கொண்டிருக்கும் மனிதரைப் பொருத்தும்

படகின் திசைவேகம் என்ன?



[தகவல் : படகுக்கும் மனிதருக்கும் இடையே உராய்வு உள்ளது. ஆனால் படகுக்கும் நீருக்கும் இடையே உராய்வு கிடையாது.]

தீர்வு

மனிதரின் நிறை $m_1 = 50$ kg
படகின் நிறை $m_2 = 300$ kg
நிலையான உற்றுநோக்குபவரைப் பொருத்து:
மனிதர் நகரும் திசைவேகம் $v_1 = 2ms^{-1}$ மேலும்

படகு நகரும் திசைவேகம் v_2 (கண்டறியப்பட வேண்டியது) என்க.

i. தரையில் நிலையாக உள்ள உற்று நோக்குபவரைப் பொருத்து படகின் திசைவேகத்தைக் கணக்கிடுதல்

அமைப்பின் மீது புறவிசைகள் செயல்படாத போது, படகு – மினத அமைப்பின் அகவிசையாக செயல்படும் உராய்வின் காரணமாக மனிதன் - படகு அமைப்பு (boat – man system) இயங்குகிறது. ஆகவே நிறை மையத்தின் திசைவேகம் சுழியாகும் ($v_{cm} = 0$).

நிறைமையத்தின் சமன்பாடு (5.7) லிருந்து,

இங்கே, நிலையாக உள்ள உற்றுநோக்குபவருக்கு எதிர் திசையில் படகு செல்வதை எதிர்குறி காட்டுகிறது.

ii. நடக்கும் மனிதரைப் பொருத்து படகின் திசைவேகத்தைக் கண்டறிதல்: படகின் சார்பத் திசைவேகத்தை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

$$V_{21} = v_2 - v_1$$

இங்கே, v_{21} என்பது நடக்கும் மனிதரைப் பொருத்து படகின் சார்புத் திசைவேகமாகும்.

$$v_{21} = (-0.33) - (2)$$

$$v_{21} = -2.33 ms^{-1}$$

மனிதர் தன்னுடைய வலப்புறம் நகரும்போது படகு அவரின் இடது புறமாக நகர்வதை விடையில் உள்ள எதிர்குறி காட்டுகிறது.

- நடக்கும் மனிதனைப்பொருத்து படகின் சார்புத் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பானது, நிலையாக உற்றுநோக்குபவரைப் பொருத்து படகின் சார்புத் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பை விட அதிகம்.
- நிலையாக உற்றுநோக்குபவருக்கும் படகில் நடந்து செல்பவருக்கும் எதிர்திசையில் படகு இயங்குவதால் இரு விடைகளும் எதிர்குறியில் உள்ளன.

வெடித்தலின் நிறை மையம்

ஓய்வு நிலையிலோ அல்லது சீரான இயக்கத்திலோ உள்ள பொருளின் அகவிசைகளினால் (Internal forces) வெடித்தல் நடைபெறுகிறது எனில், அதன் நிறை மையத்தின் நிலை பாதிக்கப்படுவதில்லை. அது, அதே ஓய்வு நிலையிலோ அல்லது சீரான திசைவேகத்திலோ இருக்கும். ஆனால் வெடித்தபகுதிகளின் இயக்கவியல் அளவுகள் (kinematic quantities) பாதிக்கப்படும். வெடித்தலானது புறவிசைகளின் காரணமாக நிகழ்கிறது எனில் நிறையைம், மற்றும் வெடித்த பகுதிகள் ஆகியவற்றின் இயக்கவியல் அளவுகள் பாதிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

5 kg நிறையுள்ள எறியமானது, (projectile) அது இயக்கத்தில் உள்ளபோதே தானாக வெடித்த இரு கூறுகளாகப் பரிகிறது. அதில் 3 kg நிறையுடைய

ஒரு கூறானது, வீச்சின் நான்கில் மூன்று பங்கு $\frac{3}{4}R$ தொலைவில் விழுகிறது. மற்றொரு கூறு எங்கு விழும்?

தீர்வு

புறவிசைகளின் துணையின்றி தானகா வெடிப்பதால் எறியத்தின் நிறை மையம் பாதிக்கப்படாது. மேலும் நிறையைமானது தொடர்ந்து பரவளையப் பாதையிலேயே செல்லும். ஆனால் அதன் கூறுகளானது பரவளையப் பாதையை மேற்கொள்ளாது. கூறுகள் அனைத்தும் தரையில் விழும்போது நிறைமையம் எறியப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து படத்தில் காட்டப்பட்டதுபோல் R தொலைவை (நெடுக்கம்) அடைகிறது. ஆகவே இறுதியில், படத்தில் காட்டியுள்ளபடி நிறை மையமானது எறி புள்ளியிலிருந்து R தொலைவில் (நெடுக்கம்) அமைந்திருக்கும்.

நிறைமையத்தின் இறுதி நிலையை ஆதி புள்ளியாக எடுத்துக் கொண்டால், திருப்புத்திறன்களின் தத்துவத்தின் படி

$$m_1v_1 + m_2v_2$$

இங்கு, $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $x_1 = \frac{1}{4}R$ மற்றும் $x_2 = d$ என எடுத்துக் கொள்க.

$$3 \times \frac{1}{4}R = 2 \times d; d = \frac{3}{8}R$$

எறி புள்ளிக்கும் 2 kg நிறை விழுந்துள்ள புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு R+d.

$$R + d = R + \frac{3}{8}R = \frac{11}{8}R = 1.375R$$

எனவே 2 kg நிறையுடைய மற்றொரு கூறானது எறிபுள்ளியிலிருந்து 1.375 R என்ற தொலைவில் விழுகிறது. (இங்கு R என்பது எறிபொருளின் கிடைத்தள நெடுக்கமாகும்)

திருப்பு விசை மற்றும் கோண உந்தம் (Torque and Angular Momentum)

ஒரு பொருளின் மீது நிகர விசை செயல்படும்போது, அவ்விசையானது நேர்கோட்டு இயக்கத்தை விசையின் திசையில் ஏற்படுத்தும். பொருளானது ஒரு புள்ளியிலோ அல்லது அச்சிலோ பொருத்தப்பட்டுள்ளது எனில், அவ்விசையானது பொருளை சுழலச் செய்கிறது. சுழற்சியானது விசை செயல்படும் புள்ளியைப் பொறுத்து அமையும். இவ்வாறு விசை ஏற்படுத்தும் சுழற்சி விளைவை விசையின் திருப்புத்திறன் என்கிறோம். இது திருப்புவிசை எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வகை இயக்கத்திற்கு நடைமுறை வாழ்க்கையில் ஏராளமான எடுத்துக்காட்டுகள் உள்ளன. அவற்றில் சில: கீல்களைப் பொறுத்து கதவுகளை திறந்து மூடுதல் மற்றும் திருகு குறடு (wrench) மூலம் திருகு மறையை (nut) சுழலச்செய்தல்.

சுழற்சியின் அளவானது விசையின் எண்மதிப்பு, அதன் திசை, மற்றும் விசை செயல்படும் புள்ளிக்கும் அச்சுக்கும் இடைபட்ட தொலைவு இவற்றை சார்ந்தது. திருப்பு விசையானது சுழற்சி இயக்கத்தை ஏற்படுத்தும் பொழுது அப்பொருளின் மாறுபடும் இப்பகுதியில் திருப்பு விசை மற்றும் திண்மப்பொருளில் அதன் விறைவு ஆகியவை பற்றிய பயில்வோம்.

திருப்பு விசையின் வரையறை

ஒரு புள்ளி அல்லது அச்சைப் பொருத்து பொருளின் மீது செயல்படுத்தப்படும் புறவிசையின் திருப்புத்திறன் திருப்பு விசை என வரையறுக்கப்படுகிறது. திருப்பு விசையின் சமன்பாடு

$$\overline{\tau} = \vec{r} \times \overline{F}$$

இங்கு, $\dot{r}$ என்பது படம் 5.4 ல் காட்டியுள்ளவாறு ஆயபுள்ளியிலிருந்து பொருளின் மீது $\dot{F}$ என்ற விசை செயல்படும் புள்ளியின் நிலை வெக்டராகும்.

இங்கு $\dot{r}$ மற்றும் $\dot{F}$ இன் பெருக்குத் தொகையை வெக்டர் பெருக்கம் அல்லது குறுக்குப் பெருக்கம் எனலாம். இரு வெக்டர்களை, வெக்டர் பெருக்கம் அல்லது குறுக்கு பெருக்கம் செய்யும்போது வரும் வெக்டரானது அவ்விரு வெக்டர்களுக்கு செங்குத்துத் திசையில் இருக்கும். (அலகு 2 பிரிவு 2.5 இல் காண்க:தலைப்பு : 2.5) எனவே திருப்பு விசை $\overline{\tau}$ என்பது வெக்டர் அளவாகும்.

திருப்பு விசையானது எண்ணளவில் $rF\sin\theta$, என்ற எண்மதிப்பையும், $\dot{r}$ மற்றும் $\dot{F}$ க்கு செங்குத்தான திசையும் பெற்றிருக்கிறது. இதன் அலகு Nm.

$$\bar{\tau} = (rF\sin\theta)\hat{n}$$

இங்கு θ என்பது $\dot{r}$ மற்றும் $\dot{F}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் மற்றும் $\hat{n}$ என்பது $\bar{\tau}$ இன் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர். திருப்புவிசை $\bar{\tau}$ என்பது $\dot{r}$ மற்றும் $\dot{F}$ ஆகிய இரு வெக்டர்களில் இருந்து பெறப்படுவதால், இதனை போலி வெக்டர் (pseudo vector) என்றும் அழைக்கலாம்

திருப்பு விசையின் திசையினை வலக்கை விதியை பயன்படுத்தி காணலாம். இவ்விதியின்படி, வலதுகையின் விரல்கள் நிலைவெக்டரின் திசையிலும் உள்ளங்கை விசையின் திசையைப் பார்த்தவாறும் வைத்துக்கொண்டு விரல்களை மடக்கும் போது நீட்டப்பட்ட கட்டைவிரல் திருப்பு விசையின் திசையைக் குறிக்கும். இது படம் 5.5 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

திருப்பு விசையின் திசையைக் கொண்டு, அத்திருப்பு விசை எவ்வகையான சுழற்கியை ஏற்படுத்தும் என்று கண்டறியலாம். ஊதாரணமாக திருப்பு விசையின் திசையானது தளத்திற்கு வெளியே செயல்படுகிறது எனில் திருப்பு விசையினால் ஏற்படும் சுழற்சி கடிகார முள் சுழலும் (இடஞ்சுழி) திசைக்கு எதிர்த் திசையிலும், மாறாக தளத்தை நோக்கி திருப்பு விசையானது செயல்படுகிறது எனில் சுழற்சியின் திசை கடிகார முள் சுழலும் திசையிலேயே (வலஞ்சுழி) செயல்படுகிறது. இவை படம் 5.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

திருப்பு விசையின் எண்மதிப்பும், திசையும் பல நிகழ்வுகளில் தனித்தனியே பெறப்படுகின்றன. திருப்பு விசையின் திசையைக் கண்டறிய வலக்கைவிதி அல்லது வெக்டர் விதியை பயன்படுத்தியும், எண்மதிப்பை கண்டறிய ஸ்கேலர் வடிவத்தை பயன்படுத்தியும், அதாவது

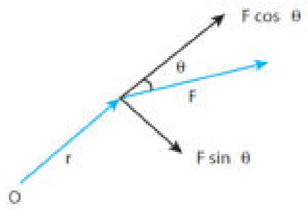
$$\tau = rF\sin\theta$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலமும் பெறலாம்.

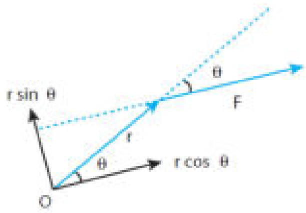
திருப்பு விசையின் எண் மதிப்பை பெற $\sin\theta$ வை r அல்லது f உடன் சேர்த்து இருவகைகளில் குறிக்கலாம்.

$$\tau = r(F\sin\theta) = r \times (F\perp)$$
$$\tau = (r\sin\theta)F = (r\perp) \times F$$

இங்கு, (F sin θ) என்பது $\dot{r}$ க்கு செங்குத்தான $\dot{F}$ இன் கூறு. அதே போல் (r sin θ) என்பது $\dot{F}$ க்கு செங்குத்தான $\dot{r}$ ன் கூறு. இவ்விரு நிகழ்வுகளையும் படம் 5.7 இல் காணலாம்.



(a) $\tau = r\,(F \sin\theta) = r(F_\perp)$



(b) $\tau = (r \sin\theta)\,F = (r_\perp)F$

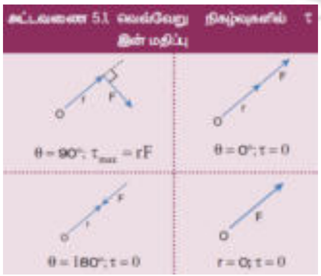
படம் 5.7 திருப்பு விசையைக் கணக்கிடும் இருமுறைகள்

$\vec{r}$ மற்றும் $\vec{F}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ வை அடிப்படையாகக் கொண்டு திருப்பு விசையானது வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பெறும்.

$\vec{r}$ மற்றும் $\vec{F}$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளபோது திருப்பு விசையின் மதிப்பு பெருமமாகும். அதாவது $\theta = 90^\circ$ எனும் பொழுது $\sin 90^\circ = 1$, என்பதால் $\tau_{max} = rF$

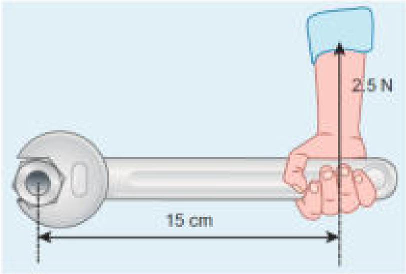
$\vec{r}$ மற்றும் $\vec{F}$ இணையாக ஒரே திசையிலோ, எதிரெதிர் திசையிலோ செயல்படும்போது திருப்பு விசையின் மதிப்பு சுழியாகிறது. இரு வெக்டர்களும் இணையாக ஒரே திசையில் உள்ளபோது $\theta = 0^\circ$ மற்றும் $\sin 0^\circ = 0$. இரு வெக்டர்களும் இணையாக எதிரெதிர் திசையில் உள்ளபோது $\theta = 180^\circ$ மற்றும் $\sin 180^\circ = 0$. எனவே விசையானது ஆதாரப்புள்ளியில் செயல்படுகிறதெனில் $\vec{r} = 0$ மற்றும் $\tau = 0$ அதாவது திருப்பு விசையின் மதிப்பு சுழியாகும். இதன் வெவ்வேறான நிகழ்வுகளை கீழ்கண்ட அட்டவணை 5.1 காணலாம்.

அட்டவணை 5.1 வெவ்வேறு நிகழ்வுகளில் τ இன் மதிப்பு



எடுத்துக்காட்டு

ஸ்பேனரின் கைப்பிடிக்கு செங்குத்தாக படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு விசை செலுத்தப்படுகிறது. (i) திருகு மறை (Nut) யின் மையத்தைப் பொருத்து விசையின் திருப்பு விசை (ii) திருப்பு விசையின் திசை மற்றும் (iii) திருகு மறையைப் (Nut) பொருத்து திருப்பு விசை ஏற்படுத்தும் சுழற்சியின் வகை ஆகியவற்றைக் காண்க.



தீர்வு

ஸ்பேனரின் கைப்பகுதியின் நீளம், r =15 cm = 15×10^{-2} m
செலுத்தப்பட்ட விசை, F = 2.5 N
r க்கும் F க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\theta = 90^\circ$

(i) திருப்பு விசை, $\tau = rF\sin\theta$

$$\tau = 15\times10^{-2}\times2.5\times\sin\left(90^\circ\right)$$

[இங்கு, $\sin 90^\circ = 1$]

$$\tau = 37.5\times10^{-2}\,Nm$$

(ii) வலக்கை விதிப்படி, திருப்பு விசையின் திசையானது தாளின் தளத்திலிருந்து வெளிநோக்கி அமைந்துள்ளது.

(iii) திருப்பு விசை ஏற்படுத்திய சுழற்சி கடிகாரத்தின் திசைக்கு எதிர்திசையில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு

$\left(4\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}\right)$ N விசையானது $\left(7\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}\right)$M என்ற புள்ளியில் அமைந்த நிலைவெக்டரின் மீது செயல்படுகிறது. ஆதியைப் பொருத்து திருப்பு விசையின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\overline{r} = 7\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\overline{F} = 4\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$$

திருப்பு விசை, $\overline{\tau} = \vec{r}\times\overline{F}$

$$\dot{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

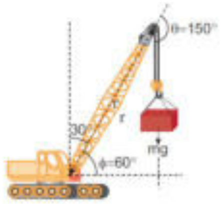
$$\dot{\tau} = \hat{i}\left(20-6\right)-\hat{j}\left(35+8\right)+\hat{k}\left(21-16\right)$$

$$\dot{\tau} = \left(14\hat{i}-43\hat{j}-37\hat{k}\right)Nm$$

எடுத்துக்காட்டு

பளு தூக்கி ஒன்றின் கரத்தின் நீளம் 20m அக்கரமானது செங்குத்து அச்சகோடு 30˚ கோணத்தில் நிறுத்துப்பட்டுள்ளது. 2 டன் எடையானது கரத்தால் தூக்கி நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. பளுதூக்கியின் கரம் பொருத்தப்பட்ட நிலையான புள்ளியைப் பொருத்து புவியீர்ப்புவிசை ஏற்படுத்திய திருப்பு விசையைக் காண்க.

[தகவல்: 1 டன் = 1000 kg; g = 10 ms^{-2}, கரத்தின் எடை புறக்கணிக்கத்தக்கது]



தீர்வு

தொங்கவிடப்பட்ட நிறையினால் ஏற்படும் விசை

F = mg = 2000 x 10 = 20000 N;
கரத்தின் நீளம் r = 20m

இந்த கணக்கிற்கு மூன்று வெவ்வேறு முறைகளில் தீர்வு காணலாம்.

முறை - I

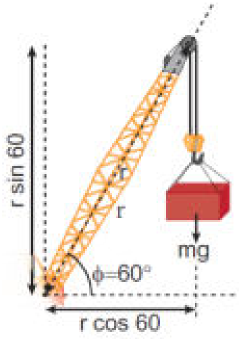
விசை F க்கும் கரத்தின் நீளம் r க்கும் இடையேயான கோணம் $\theta = 105^\circ$

பொருத்தப்பட்ட நிலை புள்ளியைப் பொருத்து கரத்தின் திருப்பு விசை

$$\tau = rF\sin\theta$$
$$\tau = 20\times 20000\times\sin\left(105^\circ\right)$$
$$= 400000\times\sin\left(90^\circ+60^\circ\right)$$
[இங்கு, $\sin\left(90^\circ+\theta\right)=\cos\theta$]
$$= 400000\times\cos\left(60^\circ\right)$$
$$= 400000\times\frac{1}{2}\left[\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\right]$$
$$= 200000\,Nm$$
$$\tau = 2\times 10^5\,Nm$$

முறை - II

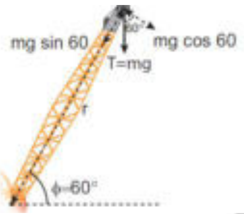
விசையையும், பளுதூக்கியில் கரம் பொருத்தப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து செங்குத்து தொலைவையும் கருதுவோம்.



$$\tau = (r \perp) F$$
$$\tau = r \cos\phi mg$$
$$\tau = 20 \times \cos 60^\circ \times 20000$$
$$20 \times \frac{1}{2} \times 20000$$
$$= 200000 Nm$$
$$\tau = 2 \times 10^5 Nm$$

முறை – III

பளு தூக்கியின் கரம் பொருத்தப்பட்ட புள்ளியையும் செங்குத்து விசையையும் கருவோம்.



$$\tau = (r \perp) F$$
$$\tau = r \cos\phi mg$$
$$\tau = 20 \times 20000 \times \cos 60^\circ$$
$$20 \times 20000 \times \frac{1}{2}$$
$$= 200000 Nm$$
$$\tau = 2 \times 10^5 Nm$$

மூன்று முறைகளும் ஒரே தீர்வினை தருகிறது.

அச்சைப் பொருத்து திருப்பு விசை (Torque about an axis)

இதுவரை ஒரு புள்ளியைப் பொருத்து திருப்பு விசையைப் பற்றி பயின்றோம். இப்பகுதியில் அச்சைப் பொருத்து திருப்பு விசையைப் பற்றி பயிலலாம். திண்மப்பொருள் ஒன்று AB யைப் பொருத்து சுழல்வது படம் 5.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. திண்மப்பொருளில் P என்ற புள்ளியில் F விசை செயல்படுகிறது என கொள்க. விசை F ஆனது தளம் ABP ல் அமையாமல் இருக்கலாம். அச்சு AB யில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி O என எடுத்துக்கொள்வோம்.

புள்ளி O வைப்பொருந்து F ன் திருப்புவிசை, $\overline{\tau} = \vec{r} \times \overline{F}$ மேலும் அச்சின் திசையில் இத்திருப்பு விசையின் கூறானது அச்சைப்பொறுத்து விசையின் திருப்பு விசையாகும். இதனை கண்டறிய நாம்

முதலில் திருப்பு விசை வெக்டர் $\bar{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ க்கும் மற்றும் அச்சு AB க்கும் இடையேயான கோணம் ϕ யை காண வேண்டும். (விசையின் தளம் ABP யில் இல்லை என்பதை நினைவில் கொள்க) AB யை பொருத்து உள்ள திருப்புவிசை என்பது AB இன் வழியாகச் செல்லும் திருப்பு விசை $\left|\bar{r} \times \vec{F}\right|$ யின் கிடைத்தளக்கூறு $\left|\bar{r} \times \vec{F}\right| \cos \phi$ ஆகும். அதைப்போல AB க்கு செங்குத்தான திருப்பு விசை $\left|\bar{r} \times \vec{F}\right| \sin \phi$ அச்சைப்பொருத்து ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் திருப்புவிசை, அப்பொருளின் அச்சைப்பொருத்து சுழற்றுகிறது. மேலும் அச்சுக்கு செங்குத்தாக உள்ள திருப்பு விசை சுழல் அச்சை பொருத்து சுழற்றுகிறது. இவை இரண்டு ஒரே நேரத்தில் திண்மப்பொருளின் மீது செயல்படும் போது பொருளானது அச்சுச் சுழற்சியை (Precession) மேற்கொள்ளும். சுழலும் பம்பரம் ஒன்று ஓய்வு நிலையை நெருங்கும் போது அச்சு சுழற்சியை மேற்கொள்ளும் என்பதை படம் 5.9 லிருந்து அறியலாம்.

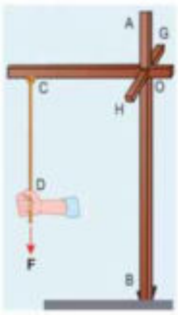
அச்சுக் சுழற்சியை விளக்குவது என்பது நம் பாடப்பகுதிக்கு அப்பாற்பட்டது. எனவே, திருப்பு விசைகளின் செங்குத்து கூறுகளின் விளைவை நீக்குவதற்கு சில வரம்புகளைக் கருதினால் சுழல் அச்சு சுழற்சி அடையாமல் ஒரே அச்சில் நிலை பெற்று இருக்கிறது. எனவே திருப்புவிசையின் செங்குத்து கூறுகளை கருத வெண்டிய அவசியம் இல்லை. இதன் பின்னர் திண்மப்பொருட்களின் திருப்பு விசைகளின் கணக்கீடுகளுக்கு கீழ்க்கண்டவற்றை மட்டும் கருதினால் போதுமானது. ஆவை பின்வருமாறு

1. அச்சிற்கு, செங்குத்தான தளத்தில் அமைந்த விசைகளை மட்டும் கருத வேண்டும் (மற்றும் அச்சினை வெட்டிச்செல்லவும் கூடாது)

2. அச்சிற்கு செங்குத்தாக உள்ள நிலை வெக்டரையே கருத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

AB, OC, GH என்ற சட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு தரையில் நிலையாக பொருத்தப்பட்டுள்ளது. ஒரு கம்பி C என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் தனித்த முனை D யானது விசை F இனால் இழுக்கப்படுகிறது. விசை உருவாக்கிய திருப்பு விசையின் எண் மதிப்பையும், திசையையும்



(i) D, C, O மற்றும் B பொருத்து
(ii) CD, OC, AB மற்றும் GH அச்சுகளைப் பொறுத்து காண்க.

தீர்வு

i. D யைப் பொருத்து திருப்பு விசை சுழி. (D வழியாக F செயல்படுகிறது).
C யைப் பொருத்து திருப்பு விசை சுழி. (C வழியாக F செயல்படுகிறது)
O யைப் பொருத்து திருப்பு விசை (OC) x FGH வழியாக செயல்படுகிறது).
B யைப் பொருத்து திருப்பு விசை (GH விழியாக செயல்படுகிறது)
(F-ஐப் பொருத்து B-யிலிருந்து செங்குத்து தொலைவு OC)

ii. CD யைப் பொருத்து திருப்பு விசை சுழி (F ஆனது CD க்கு இணை).

OC யைப் பொருத்து திருப்பு விசை சுழி (AB க்கு F இணையாகிறது).

AB யைப் பொருத்து திருப்பு விசை (OC) x F (GH திசையில் அமையும்.)

ஓர் அச்சைப் பற்றிய விசையின் திருப்பு விசை ஆதிப்புள்ளியை அந்த அச்சிலேயே தேர்ந்தெடுத்தால் ஆதியை தேர்ந்தெடுப்பதை சார்ந்திராமல் அமையும். இதனை கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

திண்மப் பொருளொன்றில் உள்ள AB என்ற சுழற்சி அச்சில் உள்ள O என்ற ஆதிப்புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம். புள்ளி P யின் மீது விசை F செயல்படுவதை படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு கருதுவோம். புள்ளி O′ ஐ படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு, தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

O′ யைப் பொருத்த விசையின் திருப்பு விசை,

$$\overline{O'P}\times\vec{F}=\left(\overline{O'O}+\overline{OP}\right)\times\vec{F}$$
$$=\left(\overline{O'O}\times\vec{F}\right)+\left(\overline{OP}\times\vec{F}\right)$$

$\overline{O'O}\times\vec{F}$ என்பது $\overline{O'O}$ க்கு செங்குத்தாக இருப்பதால், இப்பகுதியானது யுடீ வழியாக எந்த கூறையும் பெற்றிருப்பதில்லை. எனவே, $\overline{O'O}\times\vec{F},\overline{OP}\times\vec{F}$ ஆகியவை AB வழியாக சம கூறினைப் பெற்றிருக்கும்.

திருப்பு விசை மற்றும் கோண முடுக்கம் (Torque and Angular Acceleration)

நிலையான அச்சைப் பொருத்து சுழலும் திண்மப் பொருளைக் கருதுக. ஒரு புள்ளி நிறை m ஆனது படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு நிலையான அச்சைப் பொருத்து வட்ட இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது. தொடுவியல் விசை $\dot{F}$ ஆனது புள்ளி நிறையை சுழலச் செய்ய தேவையான திருப்பு விசையை அளிக்கிறது. இந்த தொடுவிசை $\dot{F}$ ஆனது புள்ளி நிறையின் நிலை வெக்டருக்கு செங்குத்தாக செயல்படுகிறது.

இது புள்ளி நிறை m இன் மீது உருவாக்கும் திருப்பு விசையானது

$$\tau = r\,F\sin 90 = rF\left[\because \sin 90 = 1\right]$$
$$\tau = r\,ma \qquad \left[\because \left(F = ma\right)\right]$$
$$\tau = r\,m\,r\alpha = mr^2\alpha\left[\because \left(a = r\alpha\right)\right]$$
$$\tau = \left(mr^2\right)\alpha$$

இவ்விசையானது நிலை வெக்டர் $\dot{r}$ க்கு செங்குத்தாக புள்ளி நிறையின் மீது செயல்படுகிறது. அச்சைப்பொருத்து புள்ளி நிறையின் மீது செயல்படும் திருப்பு விசையானது அந்த அச்சைப்பொருத்து புள்ளிநிறையின் மீது கோண முடுக்கம், α வை உருவாக்குகிறது.

வெக்டர் வடிவில்

$$\dot{\tau} = \left(mr^2\right)\dot{\alpha}$$

τ மற்றும் α இவற்றில் திசையானது சுழலும் அச்சின் வழியாகவே அமையும். τ இன் திசையில் α அமைந்தால், இது கோண முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தும். மாறாக, τ ன் திசை α வுக்கு எதிராக அமைந்தால் கோண எதிர்முடுக்கத்தை உருவாக்கும். சமன்பாடுகள் 5.14 மற்றும் 5.15 இல் உள்ள கோவை "mr^2" புள்ளி நிறையின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் என்று அழைக்கப்படுகிறது. திண்மப் பொருளானது புள்ளி நிறையைப் போன்ற பல துகள்களால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, அப்பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் என்பது அப்பொருள் உள்ளடக்கிய தனித்தனியான எல்லா

புள்ளி நிறைகளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்களின் கூடுதல் $I=\sum m_i r_i^2$ ஆகும். எனவே, திருப்பு விசையின் சன்பாடு

$$\vec{\tau}=\left(\sum m_i r_i^2\right)\vec{\alpha}$$

$$\hat{\tau}=I\hat{\alpha}$$

வெவ்வேறான வடிவம் கொண்ட பொருட்களின் நிலைமத்திருப்புதிறன் மற்றும் அதன் முக்கியத்துவத்தை மேலும் பிரிவு 5.4 இல் பயிலலாம்.

கோண உந்தம்

சுழற்சி இயக்கத்தில் கோணஉந்தம் என்பது இடமபெயர்வு இயக்கத்தில் உள்ள நேர்கோட்டு உந்தத்திற்கு இணையாக ஒரு இயற்பியல் அளவு. நேர்கோட்டு உந்தத்தின் திருப்புத்திறனாது புள்ளிநிறையின் கோணஉந்தம் என வரையறுக்கப்படுகிறது மாறாக, ஒரு புள்ளி அல்லது அச்சிலிருந்து $\dot{r}$ நிலையில் உள்ள ஒரு புள்ளி நிறையின் நேர்கோட்டு உந்தம் $\dot{P}$ எனில், அதன் கோண உந்தம் $\dot{L}$ -ஐ கணிதவியலின்படி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\dot{L}=\dot{r}\times\dot{P}$$

கோண உந்தத்தின் எண்மதிப்பு

$$L=r\,P\sin\theta$$

இங்கு θ என்பது $\dot{r}$ க்கும் $\dot{P}$ க்கும், இடைப்பட்ட கோணம். கோண உந்தம் $\dot{L}$ ஆனது $\dot{r}$ மற்றும் $\dot{P}$ இருக்கும் தளத்திற்கு செங்குத்தான தளத்தில் அமையும். திருப்பு விசையை முந்தைய நிகழ்வுகளில் எழுதிய போன்றே இங்கும் $\sin\theta$ வை $\dot{r}$ அல்லது $\dot{P}$ யோடு சேர்ந்து எழுத முடியும்.

$$L=r\left(p\sin\theta\right)=r\left(p\perp\right)$$

$$L=\left(r\sin\theta\right)p=\left(r\perp\right)p$$

இங்கு, $p\perp$ என்பது r க்கு செங்குத்தான நேர்கோட்டு உந்தத்தனன் கூறு, அதைப்போன்ற $r\perp$ என்பது p க்கு செங்குத்தான நிலைவெக்டரின் கூறு.

நேர்க்கோட்டு உந்தம் சுழியாகும் போதோ (p=0) அல்லது தகளானது ஆதிப்புள்ளியில் ($\dot{r}$=0) உள்ளபோதோ அல்லது $\dot{r}$ மற்றும் $\dot{P}$ இணையான திசையிலோ, எதிரெதிரான திசையிலோ அமைந்திருக்கும் ($\theta=0^\circ$ or 180°) போதோ கோண உந்தம் சுழி (L=0) ஆகும்.

கோண உந்தம் சுழற்சி இயக்கத்திற்கு மட்டும் தொடர்புடையது என தவறுதலாக புரிந்து கொள்ளக் கூடாது. இது உண்மையல்ல. கோண உந்தமானது நேர்கோட்டு இயக்கத்திற்கும் தொடர்புடையது. இதனை கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

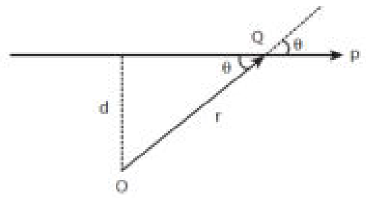
m நிறை கொண்ட துகளானது v என்ற மாறாத திசை வேகத்துடன் இயங்குகிறது. ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைப் பொருத்து இயக்கம் முழுவதிலும் இதன் கோண உந்தம் மாறாதது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

m நிறை கொண்ட துகளாகது v என்ற மாறாத திசை வேகத்துடன் இயங்குகிறது. ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைப் பொருந்து இயக்கம் முழுவதிலும் இதன் கோண உந்தம் மாறாதது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

m நிறை கொண்ட Q துகளானது மாறா திசைவேகம் $\bar{v}$ யுடன் செல்வதாக கொள்வோம்.



மாறா திசைவேகம் என்பதால் துகளின் பாதை நேர்க்கோட் பாதையாக அமையம். அதன் உந்தமும் ($\bar{p} = m\bar{v}$) அதே பாதையில் நேர்கோட்டில் அமையும். அப்பாதையிலிருந்து செங்குத்து தொலைவில் (d)ஆதிப்புள்ளி O வை எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் Q என்ற புள்ளியில் அமைந்து துகளின் வெக்டர் $\overline{OQ} = \bar{r}$ என்க. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் $\dot{r}$ க்கும் $\bar{p}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க எனவே அக்கணத்தில் கோண உந்தத்தின் எண்மதிப்பு

$$L = OQ\, p \sin\theta = OQ\, mv \sin\theta \left(OQ \sin\theta\right)$$

இங்கு $\left(OQ \sin\theta\right)$ என்பது ஆதிப்புள்ளிக்கும் பொருள் செல்லும் திசைக்கும் உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகும். எனவே, துகள் Q வின் ஆதியைப்பொறுத்த கோண உந்தம்

$$L = mvd$$

மேற்கண்ட கோண உந்தத்தின் சமன்பாடு கோணம் θ வை பெற்றிருப்பதில்லை. நேர்கோட்டு உந்தம் p (p = m v) மற்றும் செங்குத்து தொலைவு d இரண்டும் மாறிலிகள். ஆதலால், துகளின் கோண உந்தமும் மாறாது. எனவே கோண உந்தமானது நேர்கோட்டு இயக்கத்தில் உள்ள பொருட்களோடும் தொடர்புடையது. பொருள் செல்லும் நேர்க்கோட்டு திசை, ஒருவேளை ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் சென்றால் கோண உந்தம் சுழியாகவும், அது மாறாததாகவும் இருக்கும்.

கோண உந்தம் மற்றும் கோணத்திசைவேகம்

திண்மப் பொருள் ஒன்று நிலையான அச்சைப் பற்றி சுழல்கிறது. ஒரு புள்ளி நிறை m ஆனது படம் 5.12 இல் காட்டியுள்ளவாறு வட்ட இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது.

சுழலும் அச்சிலிருந்த r தொலைவில் புள்ளிநிறை m அமைந்துள்ளது. வட்டப்பாதையில் எந்தவொரு கணத்திலும் நேர்கோட்டு உந்தமானது வட்டப்பதையின் தொடுகோட்டு திசையில் இருக்கும். கோண உந்தம் $\dot{L}$ ஆனது $\dot{r}$ மற்றும் $\bar{p}$ -க்கு வட்டப்பதையின் செங்குத்தாக இருக்கும். எனவே கோண உந்தம் சுழலும் அச்சின் திசையில் அமையம். இந்நிகழ்வில் θ என்பது $\dot{r}$ கும் $\bar{p}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம். கோண உந்தம் (L) இன் மதிப்பு $\theta = 90^\circ$ எனும்போது

$$L = r\,mv \sin 90^\circ = r\,mv$$

இங்கு, v என்பது நேர்கோட்டு திசைவேகம். வட்ட இயக்கத்தில் கோண திசை வேகத்திற்கும் ω, நேர்க்கோட்டு திசை வேகத்திற்குமான தொடர்பு $v = r\omega$

$$L = rmr\omega$$

$$L = \left(mr^2\right)\omega$$

L மற்றும் ω ஆகியவற்றின் திசை சுழலும் அச்சின் திசையிலேயே இருக்கும். மேற்கண்ட சமனப்பாட்டின் வெக்டர் வடிவம்,

$$\dot{L} = \left(mr^2\right)\dot{\omega}$$

முன்னர் விவாதித்தது போல சமன்பாடு 5.22 மற்றும் 5.23 இல் கோவை உறுப்பு mr^2 ஆனது புள்ளி நிறையின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் ஆகும். திண்மப் பொருளானது புள்ளி நிறைப்போன்ற பல துகள்களினால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே திண்மப் பொருளின் நிலைம திருப்புத்திறன் என்பது அப்புள்ளி நிறைகளின் நிலைமத் திருப்புதிறனின் கூட்டுத் தொகை $\left(I = \sum m_i r_i^2\right)$ ஆகும். எனவே, பொருளின் கோணஉந்தமானது,

$$\overline{L} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\overline{\omega}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

பிரிவு 5.4ல் நிலைமத் திருப்புதிறன் பற்றி தெளிவாக பயிலலாம்.

திருப்பு விசை மற்றும் கோண உந்தம்

திண்மப் பொருளின் கோண உந்தம் எண்ணளவில் L = Iω மற்றும் திண்மப் பொருளின் திருப்பு விசை $\tau = I\alpha$

மேலும் திருப்புவிசையின் சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எடுதலாம்.

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} \because \left(\alpha = \frac{d\omega}{dt}\right)$$

இங்கு ω என்பது கோணத் திசைவேகம்.

$$\tau = \frac{d\left(I\omega\right)}{dt}$$

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் மூலம் நாம் காண்பது புற திருப்பு விசையானது திண்மப்பொருள்களின் மீது நிலையான அச்சைப்பொருத்து கோண உந்த மாறுபட்டு வீதத்தை அதனுள் ஏற்படுத்தும். இது சுழற்சி பற்றிய நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியாகும். மேலும் இச்சமன்பாடானது நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தின் சன்பாடான F= $\frac{dp}{dt}$ வடிவத்தை ஒத்துள்ளது.

கோண உந்த மாறா விதி (Conservation of angular momentum)

சமன்பாடு 5.27 லிருந்து, புறத்திருப்புவிசையானது திண்மப் பொருட்களின் மீது செயல்படும் போது கோண உந்த மாறுபாட்டை ஏற்படுத்தும் என்பதை அறிகிறோம்.

$$\tau = 0 \text{ எனில் } \frac{dL}{dt} = 0; L = \text{மாறிலி}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு கோண உந்தமாறாவிதியைக் குறிக்கிறது. இதனைப் பற்றி பகுதி 5.5 இல் மேலும் பயிலலாம்.

திண்மப் பொருட்களின் சமநிலை (EQUILIBRIUM OF RIGID BODIES)

ஓர பொருளானது மேசையின் மீது இயக்கமின்றி ஓய்வு நிலையில் உள்ளபோது பொருளின் மீது எந்த விசையும் செயல்படவில்லை என்கிறோம். உண்மையில் மேசையானது பொருளின் மீது கீழ்நோக்கியும் மேசையானது பொருளின் மீது ஏற்படுத்தும் எதிர்விசையானது மேல் நோக்கியும் அமைந்திருக்கும். இவ்விருவிசைகள் ஒன்றை ஒன்று சமன் செய்து கொள்கின்றன. எனவே, பொருளின் மீது நிகர விசை செயல்படவில்லை. பொருளின் மீது விசை செயல்படவில்லை என்பதற்கும். நிகர விசை செயல்பட வில்லை என்பதற்கும் அதிக வேறுபாடு உள்ளது. மேற்கூறிய விவாதமானது திருப்புத்திறன் அல்லது திருப்பு விசையின் அடிப்படையில் அமைந்து சுழற்சி இயங்கத்திற்கும் பொருந்தும்.

திண்மப் பொருளின் நேர்கோட்டு உந்தம் மற்றும் கோண உந்தம் மாறிலியாக இருந்தால் அப்பொருளின் மீது செயல்படும் நகிரவிசை சுழியாகும்.

$$\vec{F}_{net} = 0$$

இந்நிபந்தனையின் படி பொருளானது இடப்பெயர்வில் சமநிலையில் உள்ளது. இதன்படி, பொருளின் மீது வெவ்வெறான திசைகளில் செயல்படும் $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3....$ என்ற விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல் சுழியாகிறது.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.... + \vec{F} = 0$$

பொருளின் மீது $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3....$ என்ற விசைகள் வெவ்வேறான திசைகளில் செயல்படுகின்றன எனில் அவற்றின் விளைவை முறையே கிடைத்தள மற்றும் செங்குத்து கூறுகளின் மூலம் தீர்வு காணலாம். இந்திகழ்வில் கிடைத்தளச் சமநிலைக்கோ செங்குத்து சமநிலைக்கோ சாத்தியம் உள்ளது.

இதேபோல் கோண உந்தம் மாறிலியாக உள்ள போது பொருளின் மீதான நிகர திருப்பு விசை சுழியாகும்.

$$\bar{\tau}_{net} = 0$$

இந்நிபந்தனையின் படி பொருளானது சுழற்சி சமநிலையில் உள்ளது. சுழற்சிச் சமநிலையில் வெவ்வேறான சுழற்சியை உருவாக்கும் திருப்பு விசைகள் $\bar{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \bar{\tau}_3....$ ஆகியவற்றின் வெக்டர் கூடுதல் சுழியாகிறது.

$$\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_3.... + \bar{\tau} = 0$$

மேலும் ஒரு திண்மப்பொருளின் மீது நிகர விசையும், நிகர திருப்பு விசையும் சுழியாக இருந்தால் அத்திண்மப் பொருள் எந்திரவியல் சமநிலையில் உள்ளது என கூறலாம்.

$$\vec{F}_{net} = 0 \text{ மற்றும் } \bar{\tau}_{net} = 0$$

விசைகளும், திருப்பு விசைகளும் வெக்டர் அளவு என்பதால் இதன் திசைகளை தக்க குறியீடுகளுடன் பயன்படுத்த வேண்டும்.

சமநிலையின் வகைகள்

மேற்கண்ட விவாதத்தின்படி, வெவ்வேறான நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் வெவ்வேறு வகையான சமனிலைகளுக்கு வாய்ப்புள்ளது என்ற முடிவுக்கு வரலாம். இவை அட்டவணை 5.2 இல் தொகுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு

28 mg நிறையும் 10 m நீளமும் கொண்ட சீரான மரத்துண்டை அருண் மற்றும் பாபு சுமந்து செல்கின்றனர். மரத்துண்டின் முனைகளிலிருந்து இவர்கள் முறையே 1 m மற்றும் 2 m தொலைவில் பிடித்துள்ளனர். இவர்களில் யார் மரத்துண்டின் எடையை அதிகம் தாங்கிச் செல்கின்றார்.

தீர்வு

மரத்துண்டானது இயந்திரவியல் சமநிலையில் உள்ள எனக் கொள்க. அதன்படி மரத்துண்டின் மீது நிகர விசை மற்றும் நிகர திருப்பு விசையின் மதிப்பு சுழி. புவி ஈர்ப்பு விசையானது மரத்துண்டின் நிறையைத்தின் கீழ் நோக்கி செயல்படும். அருண் மற்றம் பாபு முறையே A மற்றும் B புள்ளிகளில் செலுத்தும் R_A, R_B என்ற செங்குத்து விசைகள் கீழ்நோக்கிய புவியீர்ப்பு விசையை சன் செய்கிறது.

மரத்துண்டின் மொத்த எடை, W = 28 x 10 = 280 N, ஆனது இருவராலும் தாங்கப்படுகிறது. மீள் செயல் விசையை இருவரும் தனித்தனியே அளிக்கின்றனர். மரத்துண்டின் மீது செயல்படும் அனைத்து விசைகளையும் தனித்த பொருளின் விசைப்படம் மூலம் காணலாம்.

பல்வேறு வகையான சமநிலைகளும் அதற்கான நிபந்தனைகளும்

சமநிலையின் வகைகள்	நிபந்தனைகள்
இடப்பெயர்வு சமநிலை	▪ நேர்கோட்டு உந்தம் மாறிலியாகும் ▪ நிகர விசை சுழி
சுழற்சி சமநிலை	▪ கோண உந்தம் மாறிலி ▪ நிகர திருப்பு விசை சுழி
ஓய்வுச் சமநிலை	▪ நேர்கோட்டு மற்றும் கோண உந்தங்களின் மதிப்பு சுழி ▪ நிகரவிசை மற்றும் நிகரத் திருப்புவிசை சுழி
இயக்கச் சமநிலை	▪ நேர்கோட்டு மற்றும் கோண உந்தங்கள் மாறிலி ▪ நிகர விசை மற்றும் நிகரத் திருப்பு விசைகள் சுழி.
உறுதிச் சமநிலை	▪ நேர்கோட்டு மற்றும் கோண உந்தங்களின் மதிப்பு சுழி ▪ பொருளானது அதன் நிலையில் சிறிய மாற்றம் செய்யும் போது மீண்டும் சமநிலைக்கு வரை முயற்சிக்கும். ▪ சமநிலையில் ஏற்படும் மாற்றத்தினால் பொருளின் நிறைமையத்தின் நிலையானது சற்றே உயரும் ▪ பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்போது, அதன் நிலை ஆற்றல் சிறுமமாக இருக்கும். சமநிலையில் இருந்து மாறும்போது அதன் நிலை ஆற்றல் சற்றே உயரும்.
உறுதியற்றச் சமநிலை	▪ நேர்கோட்டு மற்றும் கோண உந்தங்கள் சுழி ▪ பொருளானது சமநிலையிலிருந்து சற்றே மாற்றம் செய்து விடப்படும் போது மீண்டும் சமநிலைக்குத் திரும்ப வராது. ▪ பொருளின் நிறையைமானது சமநிலையிலிருந்து சற்று கீழ்புறமாக நகர்ந்து அமையும். ▪ நிலை ஆற்றலானது சிறுமமாக இருக்காது. மேலும் சமநிலையில் மாற்றம் அடையும்போது, நிலை ஆற்றல் குறைகிறது.
நடுநிலை சமநிலை	▪ நேர்கோட்டு உந்தமும் மற்றும் கோண உந்தமும் சுழி. ▪ பொருளின் நிலையில் மாற்றம் செய்து விடப்படும் போதும் சமநிலையிலேயே இருக்கும். ▪ பொருளின் நிலையில் சிறிய மாற்றம் செய்யும் போதும் நிலை ஆற்றல் மாற்றம் அடையாது.

இடப்பெயர்வு சமநிலையின் படி:

மரத்துண்டின் மீது செயல்படும் நிகர விசை சுழியாகிறது

$$R_A + (-mg) + R_B = 0$$

இங்கு, R_A மற்றும் R_B விசைகள் மேல்நோக்கிய நேர் குறியிலும். ஈர்ப்பியல் ஈர்ப்பு விசை (அல்லது எடை) கீழ்நோக்கி எதிர் குறியிலும் செயல்படுகிறது. $R_A + R_B = mg$

சுழற்சி சமநிலையின் படி:

மரத்துண்டின் மீத செயல்படும் நிகர திருப்பு விசையின் மதிப்பு சுழியாகிறது. விசைகள் தொலைவிற்கு செங்குத்து என்பதால்,

$$(0R)+(-4mg)+(7R_B)=0$$

இங்கு, எதிர்வினை R_A ஆனது தாங்கும் புள்ளி A யிலேயே செயல்படுவதால் A யை பொருத்து R_A யின் திருப்புவிசை சுழியாகும். ஆனால் எடை mg யானது A யைப் பொருத்து கடிகார திசையிலும், எதிர்வினை R_B ஆனது A யைப் பொருத்து எதிர் கடிகார திசையிலும் திருப்பு விசைகளை ஏற்படுத்தும்.

$$7R_B=4mg$$

$$R_B=\frac{4}{7}mg$$

$$R_B=\frac{4}{7}\times 28\times 10=160N$$

R_B யின் மதிப்பை பிரதியிட,

$R_A = mg - R_B$

$R_A = 28 \times 10 - 160 = 280 - 160 = 120$ N

R_A ஆனது R_B ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், பாபு அருணைவிட அதிக எடையை சுமக்கிறார்.

இரட்டை (Couple)

AB என்ற சீரான மெல்லியக் கம்பியை கருதுக, இதன் நிறையைம் மையப்புள்ள C யில் அமைந்து உள்ளது. கம்பியின் இரு முனைகள் A, B யில் சமமான எதிரெதிரான விசைகள் முறையே கம்பிக்கு செங்குத்தாக 2r இடைவெளியில் செயல்படுகிறது. படம் 5.13 ல் காட்டியுள்ளவாறு இவ்விரு விசைகளும் செயல்படுகிறது.

இரு சமமான விசைகள் எதிரெதிர் திசையில் செயல்பட்டு ஒன்றை ஒன்று சமன் செய்வதால் கம்பியின் மீதான நிகர விசை சுழியாகும். இப்பொழுது கம்பியானது இடப்பெயர்வு சமநிலையில் உள்ளது ஆனால் சுழற்சி சமநிலையில் இல்லை. எப்படி சுழற்சி சமநிலையில் இல்லை என்பதைக் காண்போம். கம்பியின் முனை A யில் செயல்படும் விசையின் திருப்புத்திறன் மையப்புள்ளி C யைப் பொருத்து எதிர் கடிகாரச் சுற்று (இடஞ்சுழி) திசையில் சுழற்சியை ஏற்படுத்தும். இதே போன்று கம்பியின் மறுமுனை B-ல் செயல்படும் விசையின் திருப்புத் திறனானது எதிர் கடிகாரச் சுற்று (இடஞ்சுழி) திசையிலே சுழற்சியை உருவாக்குகிறது. இவ்விரு விசையின் திருப்புத்திறன்களானது உணரச் செய்கிறது. எனவே, கம்பியானது இடப்பெயர்வு சமநிலையில் உள்ள போதும், சழற்சி இயக்கத்திற்கு அல்லது திருப்பு விளைவிற்கு உள்ளாகிறது.

ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத, செங்குத்துத் தொலைவில் பிரிக்கப்பட்டுள்ள இரு சமமான எதிரெதிர் விசைகள் ஏற்படுத்தும் திருப்பு விளைவு இரட்டையின் திருப்புத்திறன் எனப்படும் அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் பல செயல்களில் இரட்டையில் திருப்பத்திறனை படம் 5.14 ல் காணலாம்.

திருப்புத் திறன்களின் தத்துவம்

மெல்லிய, புறக்கணிக்கத்தக்க (negligible) நிறையுள்ள கம்பித் துண்டு, நீளத்தின் வழியாக சுழலியக்க மையத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. F_1 மற்றும் F_2 என்னும் இரு விசைகளானது d_1 மற்றும் d_2 தொலைவுகளில் கம்பியின் முனைகளில் செயல்படுவது படம் 5.15 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. F_1 மற்றும் F_2 என்ற இரு விசைகள் தாங்கு மையத்திலிருந்து d_1 மற்றும் d_2

தொலைவுகளில் செயல்படுவதனால் படத்தில் சாட்டியுள்ளவாறு செங்குத்து எதிர்வினை N நிறை சுழலியக்க மையத்தில் செயல்படுகிறது. கம்பியானது கிடைத்தள நிலையில் ஓய்வாக இருப்பதற்கு அது நேர்கோட்டு மற்றும் சுழற்சி சமநிலையில் இருக்க வேண்டும். எனவே, நிகர விசை மற்றும் நிகர திருப்பு விசை இரண்டும் சுழியாகும்.

சுழலியக்க மையத்தை பற்றிய நிகர விசை சுழியானால், $-F_1+N+F_2$

$$N=F_1+F_2$$

நிகர திருப்புவிசை சுழியாவதற்கு, $d_1F_1-d_1F_2=0$

$$d_1F_1=d_1F_2$$

இத்தத்துவத்தைக் கொண்டு கோல் தராசானது, $d_1=d_2$; $F_1=F_2$ என்ற நிபந்தனையின் படி பொருட்களின் நிறையை அளவிடுகிறது. சமன்பாடு 5.33 யை மாற்றி அமைக்க

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{d_2}{d_1}$$

F_1 பளு எனவும், F_2 வை நமது முயற்சி எனவும் கருதினால் $d_1<d_2$ என்ற நிபந்தனையில் நமக்கு அனுகூலமாக அமையும். இது $F_1>F_2$ என்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே, பெரிய பளுவைக் கூட சிறிய முயற்சியினால் உயர்த்த முடியும். தகவு $\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$ எளிய நெம்புகோலின் இயந்திரலாபம் எனப்படும். சுழலியக்க மையப்புள்ளியை ஆதாரப்புள்ளி என்றும் அழைக்கலாம்.

இயந்திர லாபம் (MA) = $\frac{d_2}{d_1}$

மேற்காணும் தத்துவத்தின் படி பல எளிய இயந்திரங்கள் இயங்குகின்றன.

ஈர்ப்பு மையம்

திண்மப் பொருட்கள் அனைத்தும் பல புள்ளி நிறைகளால் ஆக்கப்படுள்ளது. புள்ளி நிறைகள் அனைத்தும் புவியின் மையத்தை நோக்கிய ஈர்ப்பியல் விசையினை உணர்கிறது. நடைமுறை வாழ்வில் எந்தவோரு திண்மப் பொருளின் அளவை விட புவி மிக பெரியதாக இருப்பதால் இவ்விசைகள் அனைத்தும் கீழ்நோக்கி இணையாக செயல்படுவதாக நாம் கருதலாம். இது படம் 5.16 இல் காட்டுப்பட்டுள்ளது.

இந்த இணையான விசைகளின் தொகுபயன் விசை எப்பொழுதும் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகிறது. அப்புள்ளியே பொருளின் ஈர்ப்பு மையம் என்றழைக்கப்படுகிறது (புவியைப் பொருத்து). ஒரு பொருளின் நிலை மற்றும் திசையைக் கருதாத போது, அப்பொருளின் மொத்த எடையும் செயல்படுவதாகத் தோன்றும் புள்ளி அப்பொருளின் ஈர்ப்பு மையம் எனப்படும்.

சீரான புவியீர்ப்பு புலத்தில் ஒரு திண்மப்பொருளின் நிறைமையமும், ஈர்ப்பு மையமும் ஒரே புள்ளியில் அமையும். புவியீர்ப்பு புலத்தைப் பற்றி அலகு 6 இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

நாம் சீரான ஒழுங்கற்ற வடிவமுள்ள மெல்லிய தகட்டின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் கூட வெவ்வேறான சுழலியக்க புள்ளிகளில் பொருத்திப்பார்த்து கண்டறியலாம்.

மெல்லிய பொருளானது கிடைக்கை நிலையில் இருக்கும்போது, பொருளின் மொத்த எடையானது செயல்படும் புள்ளியான ஈர்ப்பு மையத்தில் சுழலியக்க புள்ளி அமைந்திருப்பதை படம் 5.17 இல் காணலாம். படம் 5.17ல் காட்டியுள்ளபடி நிகர ஈர்ப்பு விசைகள் செயல்படும் புள்ளியான ஈர்ப்பு மையத்தில், மெல்லிய பொருளானது நிலைநிறுத்தப்படும் போது கிடக்கையாகவே உள்ளது.

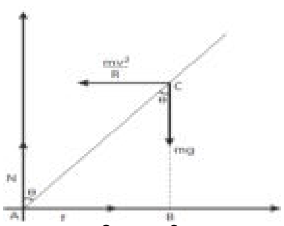
பொருளானது ஈர்ப்பு மையத்தில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளபோது திண்மப் பொருளில் உள்ள எல்லா புள்ளி நிறைகளின் மீது செயல்படும் திருப்புவிசைகளின் தொகுபயன் சுழியாகும். மேலும் பொருளின் எடையானது சுழலியக்க புள்ளியில் செயல்படும் செங்குத்து விசையினால் சமன்செய்யப்படுகிறது. பொருளானது உறுதிச் சமநிலையில் கிடைக்கை நிலையிலேயே அமைந்திருக்கும்.

ஒழுங்கற்ற மெல்லிய பொருட்களின் ஈர்ப்பு மையத்தினை மற்றொரு முறையின் மூலமும் கண்டறியலாம். பொருளானது P, Q, R என்ற வெவ்வேறான புள்ளிகளில் படம் 5.18 இல் காட்டியுள்ளவாறு தொங்கவிடப்படுகிறது எனில், PP', QQ', RR' ஆகிய குத்துக் கோடுகள் அனைத்தும் ஈர்ப்பு மையம் வழியாக செல்கிறது. இங்கு பொருள் தொங்கவிடப்பட்ட புள்ளியில் செயல்படும் எதிர் விசையும் நிறைமையத்தின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசையும் ஒன்றை ஒன்று சமன் செய்கிறது. மேலும் இவற்றால் ஏற்படும் திருப்பு விசைகளும் குத்து கோடுகளின் மீது உள்ளபோது ஒன்றை ஒன்று சமன் செய்கிறது.

வட்டப்பாதையில் மிதிவண்டி ஓட்டுபவரின் சாய்வு இயக்கம்

மிதிவண்டி ஓட்டுபவர் சமநிலையில் r ஆரம் உள்ள வட்டப்பாதையில் (உயர்த்தப்படாத பாதையில்) v வேகத்துடன் செல்ல முயற்சிப்பதாகக் கருதுவோம். மிதிவண்டி மற்றும் ஓட்டுபவரையும் சேர்த்து m நிறை கொண்ட ஒரே அமைப்பாகக் (simple system) கருதுவோம். இவ்வமைப்பின் நிறைமையம் C மற்றும் இது O வை மையமாக கொண்டு r ஆரம் கொண்ட வட்டப் பாதையில் செல்கிறது. படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு OC யை X அச்சாகவும், O-வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோடு OZ-ஐ Z-அச்சாகவும் கொள்வோம்.

இவ்வமைப்பு (system) Z -அச்சை சுழல் அச்சாகக் கொண்டு, என்ற கோணத் திசைவேகத்தில் $\omega, \left(\omega = \frac{v}{r}\right)$ அச்சைப் பொறுத்து சுழல்கிறது. இவ்வமைப்பானது சுழலும் குறிப்பாயத்தில் ஓய்வு நிலையில் உள்ளது. சுழலும் குறிப்பாயத்தைக் கொண்டு நாம் தீர்வுகளை காணும்பேது அமைப்பின் மீது மையவிலக்கு விசை (போலி விசை) $\frac{mv^2}{r}$ செயல்படுவதாகக் கருதவேண்டும். இவ்விசையானது ஈர்ப்பு மையம் வழியாக செயல்படுகிறது. இவ்வமைப்பின் மீது செயல்படும் விசைகளாவன (i) புவியீர்ப்பு விசை mg (ii) செங்குத்து விசை N (iii) உராய்வு விசை f மற்றும் (iv) மைய விலக்கு விசை $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$. சுழற்சி குறிப்பாயத்தில் அவ்வமைப்பானது சமநிலையில் இருக்கு வேண்டுமானால் அதன் மீது செயல்படும் நிகர விசை மற்றும் நிகர திருப்பு விசையின் மதிப்பு சுழியாக வேண்டும். A என்ற புள்ளியைப் பொருத்து அனைதது திருப்பு விசைகளும் செயல்படுவதாகக் கருதுவோம். ஆனைத்து திருப்பு விசைகளும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது எனக் கருதுக.



மிதிவண்டி ஓட்டுபவரின் மீது வளைவுப் பாதையில்
செயல்படும் விசைகள்

சுழற்சி சமநிலையில்

$\bar{\tau}_{net} = 0$

புள்ளி A வைப் பொருத்து, புவிஈர்ப்பு விசை mg ஆல் ஏற்படும் திருப்பு விசை

= mg (AB) (கடிகார திசையில்)

மையநோக்கு விசையின் திருப்பு விசை

$= \frac{mv^2}{r}$ (BC) (எதிர் கடிகார திசையில்)

ஏதிர் கடிகார திசையை நேர்க்குறியாகவும், கடிகார திசையை எதிர்க்குறியாகவும் கொள்வது மரபு.

எனவே,

$$-mg\,AB + \frac{mv^2}{r}BC = 0$$

$$mgAB = \frac{mv^2}{r}BC$$

$\Delta ABC, AB = AC\sin\theta$ மற்றும் $BC = AC\cos\theta$

$$mg\,AC = \frac{mv^2}{r}AC\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg}$$

r ஆரம் கொண்ட சமமான வட்டப் பாதையில் எ திசைவேகத்துடன் மிதிவண்டி ஒட்டுபவர் கடக்க முயற்சிக்கும்போது கீழே விழாமல் சமநிலையில் இருக்க θ கோணம் சாய்ந்த நிலையில் கடக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

20 ms^{-1} என்ற திசைவேகத்துடன் வட்டப்பாதையில் மிதிவண்டி ஒட்டுபவர் செங்குத்து தளத்துடன் 30° கோணம் சாய்ந்த நிலையில் கடக்கிறார். வட்டப்பாதையின் ஆரம் என்ன?

(g = 10 ms^{-2} எனக் கொள்க)

தீர்வு:

மிதிவண்டி ஒட்டுபவரின் திசைவேகம், V = 20 ms^{-1}

குத்துச்சுடன் கோணம் $\theta = 30°$

வட்டப்பாதையைக் கடக்க நிபந்தனை $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை மாற்றி அமைக்க ஆரம்

$r = \frac{v^2}{\tan\theta g}$ ஐ பிரதியிட,

$$r = \frac{(20)^2}{(\tan 30^\circ)\times 10} = \frac{20\times 20}{(\tan 30^\circ)\times 10}$$

$$= \frac{400}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times 10}$$

$$r = \left(\sqrt{3}\right)\times 40 = 1.732\times 40$$

$$r = 69.28\,m$$

நிலைமத் திருப்புத்திறன் (MOMENT OF INERTIA)

திண்மப்பொருள்டகளின் இது பருப்பொருட்களாக கருதப்படுகிற (Bulk Object). திருப்புவிசை மற்றும் கோண உந்தத்தின் சமன்பாடுகளில் $\sum m_i r_i^2$ கோவையை (term) நாம் அறிந்துள்ளோம். இது மதிப்பு பருப்பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் என்று அழைக்கப்படுகிறது. m_i புள்ளி நிறையானது அச்சிரிருந்து r_i தொலைவில் உள்ள போது அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன் $m_i r_i^2$

புள்ளி நிறையின் நிலைமத்திருப்புத்திறன

$$I = m_i r_i^2$$

பருப்பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$I = \sum m_i r_i^2$$

இடப்பெயரவு இயக்கத்தில் நிறையை நிலைமத்தின் அளவாகவும், அதேபோல் சுழற்சி இயக்கத்தில் நிலைமதிருப்புத்திறனை சுழற்சியில் நிலைமமாகவும் நாம் கருதலாம். நிலைமத்திருப்புத்திறனின் அலகு $kg\,m^2$. இதன் பரிமாண வாய்ப்பாடு ஆடு2. பொதுவாக, பருப்பொருளின் நிறையானது மாறாதது (கிட்டத்தட்ட ஒளியின் திசைவேகத்தில் பயணிக்கும் பொருட்களைத் தவிர்த்து) ஆனால், நிலைமத்திருப்புத்திறன் மதிப்பானது மாறக்கூடியதாகும். இது பொருளின் நிறையை மட்டுக்கூடியதாகும். இது பொருளின் நிறையை மட்டுமல்லாது சுழலும் அச்சைப் பொருத்து நிறை பரவி இருக்கும் தன்மையையும் சார்ந்துள்ளது. ஒரு பொருளில் சீராக பரவியுள்ள நிறையின் நிலைமைத்திருப்புத்திறனைக் கண்டறிய முதலில், நாம் பருப்பொருளின் மீநுண்நிறை (dm) யை ஒரு புள்ளி நிறையாகவும், அச்சைப்பொருத்து அதன் நிலையை (r) என்றும் கருதுவோம். அப்புள்ளி நிறையின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$dI = (dm)r^2$$

எனக் குறிக்கலாம். பருப்பொருளின் மொத்த நிலைமத்திருப்புத்திறனை மேற்கண்ட சமன்பாட்டை தொலையீடு செய்ய,

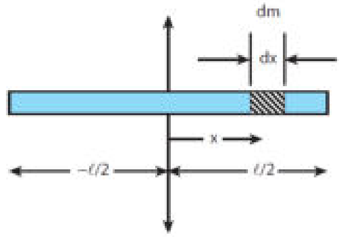
$$I = \int dI = \int (dm)\, r^2$$

$$I = \int r^2\, dm$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி பொதுவான வடிவங்களான உலோகத்தண்டு, வளையம், வட்டத்தட்டு போன்ற பருப்பொருட்களின் நிலைமத்திருப்புத்திறனை கண்டறியலாம்.

சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட திண்மத் தண்டின் (uniform rod) நிலைமத்திருப்புத்திறன்

(M) நிறையும் (l) நீளமும் கொண்ட சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட திண்மத் தண்டு படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அத்திண்மதண்டின் நிறைமையத்தின் வழியாகவும் அதன் நீளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் செல்லும் அச்சைப் பொருத்து நிலைமத் திருப்புதிறனிற்கான சமன்பாட்டைப் பெறலாம். முதலில் ஆதிப்புள்ளியை ஆய அச்சு அமைப்பைத் திண்மத்தண்டின் வடிவியல் மையத்தில் அமைந்துள்ள நிறைமையத்துடன் பொருத்த வேண்டும். இப்பொழுது திண்மத்தண்டானது ஒ அச்சில் அமைந்துள்ளதாகக் கருதுவோம். ஆதியிலிருந்து x தொலைவில் ஒரு மீநுண் நிறை (dm) ஐக் கருதுவோம்.



சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட திண்மத் தண்டின்
நிலைமத் திருப்புத்திறன்

அச்சைப்பொருத்து, பொருளின் மீநுண் நிறையிற்கன (dm) நிலைமத்திருப்புத் திறன் (dI) எனில்,

$$dI = (dm)x^2$$

நிறையானது சீராக பரவியுள்ள போது, ஒரலகு நீளமுள்ள தண்டின் நிறை $\lambda = \frac{M}{\ell}$ மிகச்சிறிய நீளமுள்ள தண்டின் நிறை

$$dm = \lambda\, dx = \frac{M}{\ell} dx$$

திண்மத்தண்டின் நீளம் முழுவதற்கும் நிலைமத்திருப்புத்திறனைக் காண நட தொகையீடு செய்ய,

$$I = \int dI = \int (dm)x^2 = \int \left(\frac{M}{l} dx\right) x^2$$

$$I = \frac{M}{l} \int x^2 dx$$

ஆதிப்புள்ளியின் இரு புறமும் நிறையானது பரவி இருப்பதால் தொகையீடு காண அதன் எல்லையை $-\ell/2$ முதல் $\ell/2$ வரை கருதுவோம்.

$$I = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]^{l/2}$$

$$I = \frac{M}{l}\left[-\frac{l^3}{24} - \left(-\frac{l^3}{24}\right)\right] = \frac{M}{l}\left[\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24}\right]$$

$$I = \frac{M}{l}\left[2\left(\frac{l^3}{24}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{12}Ml^2$$

எடுத்துக்காட்டு

சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட திண்மத்தண்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறனை அதற்கு செங்குத்தாகவும் ஏதேனும் ஒரு முனையின் வழியே செல்லும் அச்சைப்பொருத்து காண்க.

தீர்வு

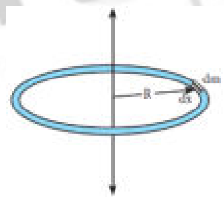
நிலைமத் திருப்புத்திறனிற்கான கருத்துருவானது முந்தைய வருவித்தலின்படி தொகையீடு செய்து சமன்பாட்டைப் பெறலாம். இப்பொழுது திண்மத்தண்டின் இடது முனையினை ஆதியாகக் கொண்டு தொகையீடு காண எல்லையை 0 முதல் l எனக் கருதினால்,

$$I = \frac{M}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{l}\left[\frac{l^3}{3}\right]$$

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$

சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட வட்ட வளையத்தின் (uniform ring) நிலைமத் திருப்புத்திறன்

m நிறையும் R ஆரமும் கொண்ட சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட வட்ட வளையத்தைக் கருதுக. வட்ட வளையத்தின் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும், அதன் மையம் வழிச்செல்லும் அச்சைப் பொருத்து நிலைமத் திருப்புத்திறனைக் காண அவ்வளையத்திலிருந்து மீநுண்நிறை dm ஆனது மிகச் சிறிய நீளம் dx தொலைவில் இருப்பதாக கொள்வோம். இதில் dm ஆனது R தொலைவில் உள்ளது எனக்கொண்டால், அத்தொலைவு படத்தில் காட்டப்பட்டது போல் அச்சிலிருந்து வளையத்தின் ஆரத்தைக் குறிக்கிறது.



சீரான வட்ட வளையத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

மீநுண்நிறை (dm) இன் நிலைமத் திருப்புத் திறன்.

$$dI = (dm)R^2$$

வட்டவளையத்தின் நீளமானது அதன் சுற்றளவுக்குச் $(2\pi R)$ சமமானது. நிறையானது சீராக பரவியுள்ள போது, ஓரலகு நீளமுள்ள நிறையின் மதிப்பு

$$\text{நீளடர்த்தி } \lambda = \frac{\text{நிறை}}{\text{நீளம்}} = \frac{M}{2\pi R}$$

மிகச்சிளிய நீளம் கொண்ட துண்டின் நிறை

$$dm = \lambda\, dx = \frac{M}{2\pi R}dx$$

வட்ட வளையம் முழுவதற்கான நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = \int dI = (dm)R^2 = \int\left(\frac{M}{2\pi R}dx\right)R^2$$

$$I = \frac{MR}{2\pi}\int dx$$

வட்ட வளையத்தின் மொத்த நீளத்தையும் கணக்கிட, தொகையிலுக்கான எல்லையை o முதல் $2\pi R$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$I = \frac{MR}{2\pi}\int_0^{2\pi R} dx$$

$$K = \frac{MR}{2\pi}\left[x\right]_0^{2\pi R} = \frac{MR}{2\pi}\left[2\pi R - 0\right]$$

$$I = MR^2$$

சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட வட்டத்தட்டின் (uniform disk) நிலைமத் திருப்புத்திறன்

m நிறையும் R ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தட்டைக் கருதுக. படத்தில் காட்டப்பட்டது போல வட்டத்தட்டானது மிகச்சிறிய வளையங்களால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் ஒரு வளையத்தின் மீநுண் நிறை dm மிகச்சிறிய தடிமன் dr, மற்றும் ஆரம் r எனக் கொள்க. மிகச்சிறிய வட்ட வளையத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் dI ஆனது

$$dI = (dm)r^2$$

நிறையானது சீராக இருப்பதால்

$$\sigma = \frac{\text{நிறை}}{\text{பரப்பு}} = \frac{M}{\pi R^2}$$ (σ-பரப்பு அடர்த்தி)

$$dm = \sigma 2\pi r\, dr = \frac{M}{\pi R^2}dx$$

இங்கு $\frac{M}{2\pi R}$ dr என்பது மிகச் சிறிய வளையத்தின் பரப்பு, ($2\pi r$ என்பது அதன் நீளம் மற்றும் னச என்பது தடிமன்) என்றால் $dm = \frac{2M}{R^2}rdr$

$$dI = \frac{2M}{R^2}r^3 dr$$

சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட வட்டத்தட்டின்
நிலைமத் திருப்புத்திறன்

வட்டத்தட்டு முழுவதற்குமான நிலைமத் திருப்புத்திறன (I) கீழ்க்கண்ட தொடர்பின் படி,

$$\int dI$$

$$I \int_0^R \frac{2M}{R^2}r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{R^4}{4} - 0\right]$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

சுழற்சி ஆரம் (Radius of Gyration)

ஒழுங்கான உருவ அமைப்பு கொண்ட பருப்பொருட்களின் நிறையானது சீராக பரவி உள்ளது எனக் கருதினால், அச்சைப் பொருத்த நிலைமத் திருப்புத்திறனிற்கான சமன்பாடு என்பது அதன் மொத்த நிறை மற்றும் வடிவியல் அம்சங்களான ஆரம், நீளம், அகலம் போன்றவற்றையும், பொருளின் அளவு மற்றும் வடிவம் ஆகியவற்றையும் உள்ளடக்கியது என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். ஆனால் நமக்குத் தேவையான நிலைமத் திருப்புத்திறனிற்கான கோவை என்பது பொருளின் நிறை, வடிவம், அளவு மட்டுமல்லாமல் சுழலும் அச்சைப் பொருத்து அதன் நிலையையும் சேர்த்ததாக இருக்க வேண்டும். இது போன்ற சமன்பாடானது சீரற்ற வடிவம் மற்றும் சீரற்ற நிறை பரவல் கொண்ட பொருட்களுக்கும் பொருந்தக்கூடிய பொதுவான சமன்பாடு ஆகும். நிலைமத் திருப்புத்திறனின் பொதுவான சமன்பாடு இங்கு, M என்பது பொருளின் மொத்த நிறை மற்றும் மு என்பது சுழற்சி ஆரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$I = MK^2$$

ஒரு பொருளின் சுழற்சி ஆரம் என்பது சுழலும் அச்சிலிருந்து சமான புள்ளி நிறை துகளின் செங்குத்துத் தொலைவு ஆகும். இந்த சமான புள்ளி நிறையானது பொருளின் ஒத்த நிறையையும், நிலைமத் திருப்புத்திறனையும் அவசியம் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

சுழற்சி ஆரத்தின் அலகு, தொலைவைப் போன்றே மீட்டர் (m) ஆகும். அதன் பரிமாணம் L ஆகும்.

சுழற்சி இயக்கத்தில் இருக்கும் திண்மப் பொருளானது

$m_1, m_2, m_3, ...m_n$ என்ற புள்ளி நிறைகளால் ஆனதாகக் கருதுவோம். இந்த நிறைகள் சுழற்சி அச்சிலிருந்து முறையே $r_1, r_2, r_3, ...r_n$ தொலைவில் உள்ளன என்க

அந்தப் பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது

$$I = \sum_{i=l}^{n} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ... + m_n r_n^2$$

“n” எண்ணிக்கை கொண்ட அனைத்து புள்ளி நிறைகளின் நிறையை சமம் எனக் கொண்டால்

m= m_1 = m_2 = m_3 =…= m_n

பிறகு,

$$\begin{aligned} I &= mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + ... + mr_n^2 \\ &= m\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... + r_n^2\right) \\ &= nm\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... + r_n^2}{n}\right) \\ I &= MK^2 \end{aligned}$$

இங்கு, nm என்பது பொருளின் மொத்த நிறை M மற்றும் K என்பது சுழற்சி ஆரம் ஆகும்.

$$K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... + r_n^2}{n}}$$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் சுழற்சி ஆரம் மு என்பது, சுழலும் அச்சைப் பொருத்து புள்ளி நிறைகளின் செங்குத்து தொலைவின் இருமடி மூலத்தின் சராசரியின் வர்க்கத்திற்கு சமமாகும்.

எனவே, எந்தவொரு பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறனையும் $I = MK^2$ என்ற சமன்பாட்டின் படி கூற இயலும்.

உதாரணமாக, M நிறையும் மற்றும் l நீளமும் கொண்ட ஒரு சீரான நிறை அடர்த்தி கொண்ட திண்மத்தண்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறனை எடுத்துக் கொள்க. நிறையைத்திற்கு செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சிலிருந்து நிலைமைத் திருப்புத்திறன்

$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

சுழற்சி ஆரத்தின வாயிலாக, K = MK²

என்பதால், $MK^2 = \frac{1}{12} Ml^2$

$$K^2 = \frac{1}{12} l^2$$

$K = \frac{1}{\sqrt{12}} l$ அல்லது $K = \frac{1}{2\sqrt{3}} l$ அல்லது

$$K = (0.289)\, l$$

எடுத்துக்காட்டு

M நிறையும், R ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தட்டு ஒன்றின் நிறை மையத்தின் வழியாகவும் அதன் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் செல்லும் அச்சைப் பற்றிய சுழற்சி ஆரத்தை காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தட்டிற்கு செங்குத்தாகவும், நிறை மையம் வழியாகவும் செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $I = \frac{1}{2} MR^2$

சுழற்சி ஆரத்திற்கான தொடர்பிலிருந்து, $I = MK^2$

என்பதனால், $MK^2 = \frac{1}{2} MR^2$; $K^2 = \frac{1}{2} R^2$

$K = \frac{1}{\sqrt{2}} R$ அல்லது $K = \frac{1}{1.414} R$ அல்லது

$$K = (0.707)R$$

இதனால் சுழற்சி ஆரம் என்பது பருப்பொருளின் வடிவில் அம்சங்களான நீளம், அகலம், ஆரம் இவைகளோடு ஒன்றிணைந்து ஒரு நேர்க்குறி எண்ணின் பெருக்கல் பலனாக இருக்கும்.

நிலைத் திருப்புத்திறனின் தேற்றங்கள்

ஒரு பொருளின் நிலைமத் திருப்பபுத்திறனானது சுழலும். அச்சை சார்ந்திருப்பது மட்டுமல்லாமல், அச்சிலிருந்து சுழலும் திசையமைப்பைப் பொருத்தும், வெவ்வேறான அச்சுக்களை பொருத்தும் மாறுபடும். சுழலும் அச்சுக்களை இடப்பெயர்வு செய்து நிலைமத் திருப்புதிறனைக் காண்பதற்குத் தேவையான இரு முக்கியமான தேற்றங்களைப் பயிலவுள்ளோம்.

(i) இணையச்சுத் தேற்றம்

பொருளின் எந்தவொரு அச்சைப்பற்றிய நிலைமைத் திருப்புத்திறனானது நிறை மையத்தின் வழியே செல்லும் இணை அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் மற்றும் பொருளின் நிறையையும் இரு அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவின் இருமடியையும் பெருக்கி வரும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

M நிறை கொண்ட பொருளின் நிறை மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் அச்சைப் பொருத்த நிலைமத் திருப்புத்திளன் I_c எனில் d தொலைவில் இவ்வச்சிற்கு இணையாக அச்சைப் பற்றி நிலைமத்திருப்புத் திறன்,

$$I = I_c + Md^2$$

திண்மப்பொருள் ஒன்றினை படம் 5.25 இல் உள்ளது போல் கருதுக. நிறை மையம் C யின் வழிச் செல்லும் அச்சு AB க்கு இணையாகவும், AB யிலிருந்து d செங்குத்துத் தொலைவில் மற்றொரு அச்சு DE யைப் பொருத்து பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் I என்க. திருப்புத்திறன் I இன் சமன்பாட்டை I_c யை கொண்டு தருவிக்க முயற்சிக்கலாம். இதற்கு பொருளின் நிறை மையத்திலிருந்து x தொலைவில் அமைந்துள்ள புள்ளி நிறை m ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். DE அச்சைப் பொருந்து புள்ளி நிறையின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $m(x+d)^2$

உடல் பருமன், மற்றும் அதனோடு கூடிய உடல் உபாதைகளான முதுகு வலி, மூட்டு வலி போன்றவை உடலின் நிறைமையத்தின் இடப்பெயர்வினால் ஏற்படுகிறது. நிறையைத்தின் இடப்பெயர் வினால் சமானமற்ற (unbalanced) திருப்பு விசை செயல்பட்டு இந்த உடல் உபாதைகளுக்கு காரணமாகிறது உடலின் மைய அச்சிலிருந்து நிறையானது தூரமாக பரவி இருப்பதால் உடலின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் அதிகரிக்கிறது இதனால் உடலை திருப்புவது கடினமாக இருக்கும்.

$$I = \sum m(x-d)^2$$

மேலும் இச்சமன்பாட்டை தீர்க்க

$$I = \Sigma m (x^2 + d^2 + 2xd)$$
$$I = \Sigma (mx^2 + md^2 + 2dmx)$$
$$I = \Sigma mx^2 + \Sigma md^2 + 2d\, \Sigma mx$$

இங்கு, $\sum mx^2$ என்பது நிறை மையம் வழிச்செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறனாகும். $I_c = \sum mx^2$

மேலும், $\sum mx = 0$ ஏனென்றால் x என்பது AB ஐயைப் பொருத்து நேர் மற்றும் எதிர்க்குறி மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். இவற்றில் கூடுதல் $\left(\sum mx\right)$ சுழியாகும்.

எனவே, $I = I_c + \sum md^2 = I_c + \left(\sum m\right) d^2$

இங்கு, $\sum m$ என்பது பொருளின் மொத்த நிறையைக் குறிக்கும் $\left(\sum m = M\right)$

$$I = I_c + Md^2$$

இணை அச்சுத் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது

(ii) செங்குத்து அச்சுத் தேற்றம்

இந்தத் தேற்றமானது மெல்லிய பொருட்களுக்கு மிகவும் பொருத்தமானது. மெல்லிய சமதளப் பரப்பிற்கு செங்குத்தான அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறனானது அந்த தளத்திலேயே அமைந்த ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுகளைப் பற்றி நிலைமத்திருப்புத்திறன்களின் கூடுதலுக்கு சமம். இந்த மூன்று அச்சுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தகவும் ஒரு பொதுப் புள்ளியில் சந்திக்குமாறு அமைந்திருக்கும்.

X மற்றும் Y அச்சுகளினால் ஆன தளத்தில் Z அச்சுக்கு செங்குத்தான மெல்லிய பொருளின் தளம் எனது Z அச்சிற்கு செங்குத்தாக அமைந்துள்ளது எனக் கொள்க. X மற்றும் Y அச்சுகளைப் பொருத்த நிலைமத் திருப்புத்த திறன்கள் முறையே I_X மற்றும் I_Y எனில் ணு அச்சைப் பொருத்த நிலைமத் திருப்புத்திறன் I_Z ஆகும். எனவே, செங்குத்து அச்சுத் தேற்றத்தின் சமன்பாடு,

$$I_Z = I_X + I_Y$$

இதனை நிரூபிக்க புறக்கணிக்கத்தக்க (negligible) தடிமன் கொண்ட மெல்லிய பொருளின் மீது ஆதிப்புள்ளி O வைக் கருதுக. படம் 5.26 இல் காட்டப்பட்டது போல் Z அச்சுக்கு செங்குத்தாக X, Y அச்சுகளால் ஆன தளம் உள்ளது. இம்மெல்லிய பொருளானது m நிறை கொண்ட பல துகள்களால் ஆனது எனக் கொள்க O விலிருந்து ஆய புள்ளிகள் (x, y) உடைய P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

Z அச்சைப் பொருத்து துகளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் mr^2

Z அச்சைப் பொருத்து மெல்லிய பொருளின் முழுவதற்குமான நிலைமத்திருப்புத் திறன் $I_z = \sum mr^2$

இங்கு, $r^2 = x^2 + y^2$

எனவே, $I_z = \sum m\left(x^2 + y^2\right)$

$$I_z = \sum mx^2 + \sum my^2$$

இதில் $\sum mx^2$ என்பது y அச்சைப் பொருத்து நிலைமத் திருப்புத்திறனாகவும், அதேபோல் $\sum my^2$ என்பது ஒ அச்சைப் பொருத்த நிலைமத்திருப்புத் திறன் எனப்படும். எனவே,

$I_X \sum my^2$ மற்றும் $I_Y = \sum mx^2$

I_Z சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$I_Z = I_X + I_Y$$

செங்குத்து அச்சுத் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு

3 kg நிறையும் 50 cm ஆரமும் கொண்ட வட்டத் தட்டு ஒன்றின் நிலைமத்திருப்புத்திறனை பின்வரும் அச்சுகளைப் பொருத்து காண்க.

i. வட்டத்தட்டின் மையத்தின் தளத்திற்கு செங்குத்தாக செல்லும் அச்சு.

ii. வட்டத்தட்டின் பரிதிய ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வழிச்செல்வதும் ளெத்திற்கு செங்குத்தானதுமான அச்சு.

iii. வட்டத்தின் மையம் வழியாகவும் அதே தளத்திலேயே செல்வதுமான அச்சு,

தீர்வு

நிறை, M= 3 kg ஆரம் R = 50 cm = 50 $\times 10^{-2}\, m = 0.5m$

(i) வட்ட தட்டின் மையத்தில் தளத்திற்கு செங்குத்தாக செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத் திறன் (I) ஆனது.

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}\times 3\times (0.5)^2 = 0.5\times 3\times 0.5\times 0.5$$

$$I = 0.375\, kg\ m^2$$

(ii) வட்டத்தட்டின் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி

$$I = I_c + Md^2$$

வழிச் செல்வதும் தளத்திற்கு செங்குத்தானதுமான அச்சைப் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்திறன் (I) யை இணையச்சு தேற்றத்தின் படி

இங்கு, $I = I_C = \frac{1}{2}MR^2$ மற்றும் $d = R$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$I = \frac{3}{2}\times 3 \times (0.5)^2 = 1.5 \times 3 \times 0.5 \times 0.5$$

$$I = 1.125\ kg\ m^2$$

(ii) வட்டத்தட்டின் மையம் வழியாகவும் அதே தளத்திலேயே செல்வதுமான அச்சைப் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத் திறனை, செங்குத்து அச்சு தேற்றத்தின் படி (I),

$$I_Z = I_X + I_Y$$

இங்கு $I_X = I_Y = \mathrm{I}$, மற்றும் $I_Z = \frac{1}{2}MR^2$

$$I_Z = 2I;\ I = \frac{1}{2}I_Z$$

$$I = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{4} MR^2$$

$$I = \frac{1}{4} \times 3 \times (0.5)^2 = 0.25 \times 3 \times 0.5 \times 0.5$$

$$I = 0.1875 \text{ kgm}^2$$

நிலைமத்திருப்புத்திறன் மதிப்பு எந்த அச்சைப் பொருத்து சுழற்றும் போது சிறுமமாக உள்ளதோ அந்த அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவது எளிமையானது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் மூன்றாவதாக செல்லப்பட்டிருக்கும் அச்சைப்பொருத்து சுழற்றுவுது எளிதானது.

வெவ்வேறு வடிவமுடைய திண்மப் பொருட்களின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

வெவ்வேறு வடிவமுடைய வெவ்வேறு அச்சுகளை பொருத்த நிலைமத்திருப்புத்திறன்கள் அட்டவணை 5.3 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு

கீழே படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள மெல்லிய தண்டினால் இணைக்கப்பட்டுள்ள இரு திண்மக் கோளங்களைக் கொண்ட அமைப்பின் நிலைமத் திருப்புத்திறனை அதன் வடிவியல் மையத்தை (Geometric centre) பொறுத்துக் காண்க.

தீர்வு:

மேலே காட்டப்பட்டிருக்கும் அமைப்பானது மூன்று பொருள்களால் ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது. (ஒரு மெல்லிய தண்டு மற்றும் இரண்டு திண்மக் கோளம்)

தண்டின் நிறை, $M = 3$ kg மற்றும்
தண்டின் நீளம், $l = 80$ cm $= 0.8$ m
நிறைமையத்தைப் பொருத்து தண்டின் நிலைமத்திருப்புத் திறன்,

$$I_{rod} = \frac{1}{2} M l^2, I_{rod} = \frac{1}{12} \times 3 \times (0.8)^2 = \frac{1}{4} \times 0.64$$

$$I_{rod} = 0.16 \text{ kg m}^2$$

கோளத்தில் நிறை, $M = 5$ kg மற்றும் ஆரம், $R = 10$ cm $= 0.1$ m

நிறை மையத்தைப் பொருத்து கோளத்தின் நிலைமத்திருப்புத்திறன், $I_C = \frac{1}{2} MR^2$

அமைப்பின் வடிவியல் மையத்தைப் பொருத்து கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I_{sph} = I_C + Md^2$$

இங்கு, $d = 40$ cm $+ 10$ cm $= 50$ cm $= 0.5$ m

$$I_{sph} = \frac{2}{5} MR^2 + Md^2$$

$$I_{sph} = \frac{2}{5} \times 5 \times (0.1)^2 + 5 \times (0.5)^2$$

$$I_{sph} = (2 \times 0.01) + (5 \times 0.25) = 0.02 + 1.25$$

$I_{sph} = 1.27\ kgm^2$

இவ்வமைப்பானது இரு கோளங்களையும் தண்டினையும் பெற்றிருப்பதால் வடிவியல் மையத்தைப் பொருத்த நிலைமத்திருப்பத்திறன் (I) ஆனது, $I = I_{rod} + (2 \times I_{sph})$

$= (0.16) + (2\times 1.27) = 0.16 + 2.54 = 2.7\ kg\ m^2$

சுழல் இயக்கவியல் (ROTATIONAL DYNAMICS)

திருப்பு விசை, கோண முடுக்கம், கோண உந்தம், கோணத் திசைவேகம் மற்றும் நிலைமத்திருப்புத்திறன் இவைகளுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைப் பகுதி 5.2 இல் பயின்றோம். இதன் தொடர்ச்சியாக இப்பகுதியில் திண்மப்பொருள் ஒன்றின் மீது திருப்பு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை, இயக்க ஆற்றல் போன்ற இயக்கவியல் அளவுகளுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைப் பயிலலாம். இறுதியாக இடப்பெயர்வு இயக்கத்திற்கும், சழற்சி இயக்கத்திற்கும் இடையேயான மதிப்புகளை ஒப்பிடலாம்.

திண்மப் பொருள் ஒன்றின் மீது சுழலும் அச்சைப் பொருத்து புற திருப்பு விசை செயல்படும்போது சுழலும் பொருளானது அச்சைப் பொறுத்து கோண முடுக்கத்திற்கும் இடையேயான தொடர்பு எண்மதிப்பில்

$$\tau = I\alpha$$

எடுத்துக்காட்டு

500g நிறையும் 10cm ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தட்டு ஒன்று தன்னிச்சையாக படத்தில் காட்டப்பட்டது போல நிலையான அச்சைப் பொருத்துச் சுழல்கிறது. எடையற்ற மற்றும் மீட்சித்தன்மையற்ற கம்பியானது வட்டத்தின் விளம்பில் சுற்றுகள் சுற்றப்பட்டு மற்றொரு முனையானது 100g நிறையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. 100g நிறையின் முடுக்கத்தை காண்க. [தகவல் : கம்பியானது வட்டத்தட்டின் விளிம்பில் நழுவவில்லை. மாறாக வட்டத்தட்டுடன் சுழல்கிறது $g = 10\ m\ s^{-2}$]

வட்டத்தட்டின் நிறையை m_1 எனவும் அதன் ஆரத்தை R எனவும் கொள்க தொங்கவிடப்பட்ட பொருளின் நிறை m_2.

$$m_1 = 500\ g = 500 \times 10^{-3}\ kg = 0.5\ kg$$
$$m_2 = 100\ g = 100 \times 100^3\ kg = 0.1\ kg$$
$$R = 10\ cm = 10 \times 10^{-2}\ m = 0.1\ m$$

வட்டத்தட்டின் விளம்பில் பல முறை சுற்றப்பட்டுள்ள மிகக் குறைந்த நிறையுள்ள மற்றும் மீட்சியற்ற கம்பியானது நழுவுதல் இல்லாமல் வட்டத் தட்டுடன் சுழல்கிறது. நிறையுள்ள மற்றும் மீட்சியற்ற கம்பியானது நழுவுதல் இல்லாமல் வட்டத் தட்டுடன் சுழல்கிறது. நிறை m_2 வின் தொடுகோட்டு முடுக்கமும் நிறை m_1 இன் இடம்பெயர்வு முடுக்கமும் சமம். m_1 மற்றும் m_2 விற்கு தனித்தனியே தனித்த பொருளின் விசை (FBD) (Free Body Diagram) படத்தை வரைக.

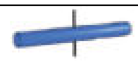
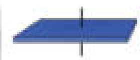
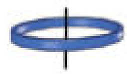
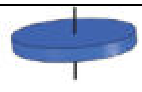
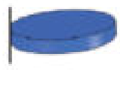
வட்டத்தட்டிற்கான தனித்த பொருளின் விசைப்படம் (FBD) (Free Body Diagram)

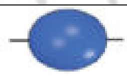
வட்டத்தட்டின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை ($m_1 g$) ஆனது கீழ்நோக்கியும் வட்டத்தட்டானது மையத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள மையப் புள்ளியின் வழியாக செங்குத்து விசை (N) யும் செயல்படுகிறது. வட்டத்தட்டின் பரிதியில் சழலும் அச்சிற்குச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி இழுவிசை

வு செயல்படுகிறது. மேலும் புவியிர்ப்பு விசையும் $(m_1 \text{g})$ யும் செங்குத்து விசை N ம் ஒன்றை ஒன்று சமன்செய்கிறது. $m_1 \text{g} = \text{N}$

இழுவிசை T ஆனது திருப்பு விசையை (R T) அளிப்பதால் வட்டத்தட்டானது கோண முடுக்கம் $\left(\alpha = \frac{a}{R}\right)$ வுடன் சுழற்சி இயக்கத்திற்கு உட்படுகிறது. இங்கு a என்பது வட்டத்தட்டின் விட்டத்தில் உள்ள புள்ளி தொடுவியல் திசையில் உணரும் நேர்கோட்டு முடுக்கமாகும். இவ்வட்டத்தட்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் I மற்றும் இதன் சுழற்சி ஆரம் K எனில்

பல்வேறு திண்மப் பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்கள்

வ.எண்	பொருள்	அச்சைப்பொருத்து	படம்	நிலைமத் திருப்புத்திறன் (I)kgm²	சுழற்சி ஆரம் (k)m	விகிதம் $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$
1.	மெல்லிய சீரானதண்டு நிறை = M நீளம் = l	நீளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் மையம் வழியாகவும் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{12}Ml^2$	$\frac{l}{\sqrt{12}}$	—
		தண்டின் ஒருமுனை வழியாகவும் நீளத்திற்கு செங்குத்தாக செல்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{3}Ml^2$	$\frac{l}{\sqrt{3}}$	
2.	மெல்லிய செவ்வகத் தகடு நிறை = M நீளம் = l அலகம் = b	தளத்திற்குக் செங்குத்தான மையத்தின் வழிச் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{12}M(l^2+b^2)$	$\sqrt{\frac{(l^2+b^2)}{12}}$	—
3.	மெல்லிய சீரான வட்ட வளையம் நிறை = M ஆரம் = R	வட்ட வளையத்தின் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் அதன் மையம் வழிச் செல்வதுமான அச்சு		MR²	R	1
		வட்ட வளையத்தின் தளத்திற்கு இணையாகவும் மையம் வழிச் செல்வதுமான அச்சு		2MR²	$\left(\sqrt{2}\right)R$	2
		வட்ட வளையத்தின் தளத்திற்கு இணையாகவும் மைய வழிச் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{2}$ MR²	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$\frac{1}{2}$
		வட்ட வளையத்தின் தளத்திற்கு இணையானதும் விளிம்பு வழி செல்வதுமான அச்சு		$\frac{3}{2}$ MR²	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)R$	$\frac{3}{2}$
4.	மெல்லிய சீரான வட்ட தட்டு	வட்டத்தட்டின் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும், மையத்தின் வழிச் செவ்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{2}$ MR²	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$\frac{1}{2}$
		வட்டத்தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் விளிம்பின் வழியே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{3}{2}$ MR²	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)R$	$\frac{3}{2}$

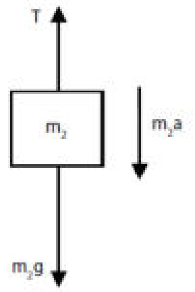
	நிறை $= M$ ஆரம் $= R$	வட்டத்தட்டின் தளத்திற்கு இணையாகவும் மையம்வழிச் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{4}MR^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)R$	$\frac{1}{4}$
		வட்டத்தட்டின் தளத்திற்கு இணையாகவும் விளிம்பின் வழியே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி செல்வதுமான அச்சு		$\frac{5}{4}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)R$	$\frac{5}{4}$
5.	மெல்லிய சீரான உள்ளீடற்ற உருளை நிறை $= M$ நீளம் $= l$ ஆரம் $= R$	உருளையின் மையம் வழியாக அதன் அச்சின் வழிச் செல்வதுமான அச்சு		MR^2	R	1
		உருளையின் மையம் வழியாக அதன் அச்சிற்கு செங்குத்தாக செல்வதுமான அச்சு		$M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{l^2}{12}\right)$	$\sqrt{\frac{R^2}{2}+\frac{l^2}{12}}$	—
6.	சீரான திண்ம உருளை நிறை $= M$ நீளம் $= l$ ஆரம் $= R$	உருளையின் மையம் வழியாக அதன் அச்சின் வழிச் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{1}{2}MR^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$\frac{1}{2}$
		உருளையின் மையம் வழியாக அதன் அச்சிற்கு செங்குத்தாக செல்வதுமான அச்சு		$M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$	$\sqrt{\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}}$	—
7.	சீரான மெல்லிய கோளகக் கூடு நிறை $= M$ ஆரம் $= R$	கோளகத்தின் விட்டத்தின் வழியாகவும் மையம் வழி செல்வதுமான அச்சு		$\frac{2}{3}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)R$	$\frac{2}{3}$
		கோளகத்தின் விளிம்பு செல்வதுமான அச்சு		$\frac{5}{3}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)R$	$\frac{5}{3}$
8.	சீரான திண்மக் கோளம் நிறை $= M$ ஆரம் $= R$	கோளகத்தின் விட்டத்தின் வழியாகவும் மையம் வழி செல்வதுமான அச்சு		$\frac{2}{5}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)R$	$\frac{2}{5}$
		கோளகத்தின் விளிம்புவழிச் செல்வதுமான அச்சு		$\frac{7}{5}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)R$	$\frac{7}{5}$

$$RT = I\alpha;\ RT - (m_1K^2)\ \frac{a}{R}$$

$$T = (m_1K^2)\ \frac{a}{R^2}$$

கம்பியின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்ட நிறையின் தனித்த பொருளின் விசைப்படம் (FBD)

இதன் புவியீர்ப்பு விசை (m_2g) கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது மற்றும் இழுவிசை T மேல்நோக்கி செயல்படுகிறது. இவற்றின் தொகு பயன் விசை நிறையின் மீது கீழ்நோக்கி செயல்படுகிறது. (T< m_2g)



$$m_2g - T = m_2a$$

வட்டத்தட்டினால் செயல்படும் இழுவிசை T யை பிரதியிட

$$m_2g - (m_1K^2)\ \frac{a}{R^2} = m_2a$$

$$m_2g = (m_1K^2)\ \frac{a}{R^2} + m_2a$$

$$m_2g = \left[\left(m_1\frac{K^2}{R^2}\right)+m_2\right]a$$

$$a = \frac{m_2}{\left[\left(m_1\frac{K^2}{R^2}\right)+m_2\right]}g$$

$\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ என்ற சமன்பாடு வட்டத்தட்டின் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் மையம் வழிச் செல்லும் அச்சைப் பற்றி சுழல்வதால் பிரதியிட்டு சுருக்க, $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$ முடுக்கத்திற்கான சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கும்.

$$a = \frac{m_2}{\left[\left(\frac{m_1}{2}\right)+m_2\right]}g ; a = \frac{2m_2}{[m_1+2m_2]}g$$

மதிப்புகளைப் பிதரியிட,

$$a = \frac{2\times 0.1}{[0.5+0.2]}\times 10 = \frac{0.2}{0.7}\times 10$$

$$a = 2.857\ ms^{-2}$$

கோணஉந்த மாறா விதி

வெளிப்புற திருப்புவிசை செயல்படாத வரை, சுழலும் திண்மப் பொருளின் மொத்தக் கோணஉந்தம் மாறாது. இதுவே கோண உந்த மாறா விதி

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$\tau = 0$ எனில், L = மாறிலி

கோண உந்தம் $L = I\omega$, எனும் போது கோணஉந்த மாறா விதியின்படி
தொடக்க கோணஉந்தம் = இறுதி கோண உந்தம்

$I_i\omega_i = I_f\omega_f$ அல்லது $I\omega$ = மாறிலி

இச்சமன்பாட்டின் மூலம், கோண உந்தம் மாறாமல் இருக்க I அதிகரிக்கும் போது ω குறையவும், அல்லது ω அதிகரிக்கும் போது I குறையவும் செய்யும் என அறியலாம்.

கோண உந்த மாறா விதியின் தத்துவமானது பல சூழ்நிலைகளில் பயன்பாட்டில் உள்ளது. மிகச் சிறந்த உதாரணமான ஐஸ் நடனக் கலைஞரின் சுழற்சி விளையாட்டு படம் 5.27 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. நடனக் கலைஞர் தன்னைத் தானே சுழற்றும் போது அவரது கைகளை வெளிப்புறமாக நீட்டினால் சுழலும் வேகம் குறைகிறது. ஏனென்றால் கைகளை உடலுக்கு வெளிப்புறமாக நீட்டும் போது நிலைமத்திருப்புத்திறன் அதிகரிப்பதால் கோணத்திசைவேகம் குறைந்து சுழலும் வேகம் குறைகிறது.

கைகளை உடலை நோக்கி உட்புறமாக மடக்கும் போது நிலைமத்திருப்புத்திறன் குறைவதால் சுழலும் வேகம் அதிகரிக்கிறது.

நீச்சல் குளத்தில் உயரத்திலிருந்து குதிக்கும் நீச்சல் வீரர் தனது உடலை உட்புறமாக சுருக்கி கொள்வதன் மூலம் நிலைமத்திருப்புத் திறனை குறைப்பது சுழற்சி வேகத்தை அதிகரிக்க உதவுவதால், காற்றில் பறந்து வரும்போது பல குட்டிகர்ணங்களைக் காற்றில் மேற்கொள்கிறார்.

எடுத்துக்காட்டு

கோணத் திசைவேகத்துடன் சுழலும் வட்ட மேசையின் மீது சர்க்கஸ் வீரர் ஒருவர் கைகளை நீட்டிய நிலையில் உள்ளார். அவர் கைகளைத் தன்னை நோக்கி உட்புறமாக மடக்கும் போது நிலைமத்திருப்புத் திறனானது ஆரம்ப மதிப்பிலிருந்து மூன்றில் ஒரு பங்காகக் குறைகிறது. அவரது புதிய நிலையில் கோண திசை வேகத்தை காண்க. (தகவல் - புறத்திருப்பு விசை செயல்படாத நிலையில்

தீர்வு

கைகள் நீட்டப்பட்ட நிலையில் சர்க்கஸ் வீரரின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் I என்க. சர்க்கஸ் வீரரின் மீதும் சுழல்மேசை மீதும் திருப்பு விசை எதுவும் செயல்படாத நிலையில் கோண உந்தம் மாறாது எனவே கோண உந்தத்தின் சமன்பாடானது.

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$I_i\omega_i = \frac{1}{3} I_i\omega_f \quad \because \left(I_f = \frac{1}{3} I \right)$$

$$\omega_f = 3\ \omega_i$$

மேற்கண்ட முடிவிலிருந்து ஆரம்பக் கோணத் திசைவேகமானது மூன்று மடங்கு அதிகரித்துள்ளது என்பது தெளிவாகிறது.

திருப்பு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை

திண்மப்பொருளொன்று நிலையான அச்சைப் பற்றி சுழல்கிறது எனக் கொள்க. இந்தப்பாடப் புத்தகத் தாளின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சைப் பொறுத்துச் சுழலக் கூடிய பொருள் ஒன்றின் குறுக்கு வெட்டுத் தோற்றத்தைப் படம் 5.29 இல் காணலாம். F என்ற தொடுகோட்டு விசை பொருளின் மீது P என்ற புள்ளியில் செயல்படுகிறது.

இத்தத் தொடுகோட்டு விசை F ஆனது பொருளைச் சிறிய அளவில் இடப்பெயர்ச்சி (ds) செய்கிறது. விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை (dw)

$$dW = F\ ds$$

இடப்பெயர்ச்சி ds க்கும் சுழற்சிக் கோணம் $d\theta$ க்கும் இடையேயான தொடர்பு

$Ds = r\, d\theta$

விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலைக்கான சமன்பாடு

$dw = F\, ds$; $dW = F\, r\, d\theta$

இதில் $F\, r$ ஆனது விசையினால் பொருளின் மீது உருவாக்கப்பட்ட திருப்பு விசை τ என்பதால்,

$dW = \tau\, d\theta$

ஒரு நிலையான அச்சைப் பொருத்து சுழலும் பொருளின் மீது வெளிப்புறத் திருப்பு விசையினால் (τ) செய்யப்பட்ட வேலை மேற்கண்ட சமன்பாட்டினால் பெறப்படுகிறது.

இடப்பெயர்வு இயக்கத்திற்குத் தொடர்புடைய விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் சமன்பாடு.

$dW = F\, ds$

சுழற்சி இயக்கத்தின் இயக்க ஆற்றல்

திண்மப் பொருள் ஒன்று அச்சைப் பொருத்துகக் கோணத் திசைவேகம் ω வுடன் சுழல்வதைப் படத்தில் காணலாம். பொருளின் உள்ள ஒவ்வொரு துகளும் அச்சைப் பொறுத்து ஒரே கோண திசைவேகத்தையும் (ω) ஆனால் வெவ்வேறான தொடுகோட்டுத் திசைவேகங்களையும், பெற்றிருக்கும். சுழலும் அச்சிலிருந்து m_i நிறையுடன் r_i தொலைவில் உள்ள துகளைக் கருதுக. இந்தத் துகள் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின் $v_i = r_i\omega$ தொடுகோட்டுத் திசைவேகம் கொண்டிருந்தால் அத்துகளின் இயக்க ஆற்றல்,

$$KE_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

இச்சமன்பாட்டை கோண திசைவேகத்தைப் பயன்படுத்தி எழுத

$$KE_i = \frac{1}{2} m_i (r_i\omega)^2 m_i r_i^2 \omega^2$$

இதே போன்ற துகள்களால் ஆக்கப்பட்டுள்ள மொத்த பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

$$KE = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2$$

இங்கு $\sum m_i r_i^2$ என்பது பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறனாகும்

$$I = \sum m_i r_i^2$$

திண்மப் பொருளின் சுழற்சி இயக்கத்தில் இயக்க ஆற்றலுக்கான சமன்பாடு

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2$$

இந்த சமன்பாட்டுக்கு இணையான இடப்பெயர்ச்சி இயக்க ஆற்றல் சமன்பாடு,

$$KE = \frac{1}{2} M v^2$$

சுழல் இயக்க ஆற்றலுக்கும் கோண உந்தத்திற்கும் இடையேயான தொடர்பு

நிலைமத் திருப்புத்திறன் I கொண்ட திண்மப்பொருளொன்று ω கோணத்திசை வேகத்துடன் சுழல்கிறது எனக் கொள்க.

பொருளின் கோண உந்தம், $L = I\omega$

பொருளின் சுழல் இயக்க ஆற்றல், $KE = \frac{1}{2} I\omega^2$

இச்சமன்பாட்டின் பகுதியையும் தொகுதியையும் I ஆல் பெருக்க, I மற்றும் இயக்க ஆற்றல் (KE) இடையேயான தொடர்பைப் பெறலாம்,

$$KE = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{(I\omega)^2}{I}$$

$$KE = \frac{L^2}{2I}$$

எடுத்துக்காட்டு

9 kg நிறையும் 3 m ஆரமும் கொண்ட வளையமானது, அந்த வளையத்தின் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும், மையம் வழிச் செல்லும் அச்சைக் பற்றி 240 rpm வேகத்தில் சுழலும்போது அது பெற்றுள்ள சுழல் இயக்க ஆற்றலை கணக்கிடுக.

தீர்வு

பொருளின் சுழல் இயக்க ஆற்றல், $KE = \frac{1}{2} I\omega^2$

வளையத்தின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் $I = MR^2$

$$I = 9 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81 kg\, m^2$$

$$\omega = 240\, rpm = \frac{240 \times 2\pi}{60} rad\, s^{-1}$$

$$KE = \frac{1}{2} \times 81 \times \left(\frac{240 \times 2\pi}{60}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 81 \times (8\pi)^2$$

$$KE = \frac{1}{2} \times 81 \times 64 \times (\pi)^2 = 2592 \times (\pi)^2$$

$$KE \approx 25920 J \qquad \because (\pi)^2 \approx 10$$

$$kE = 25.920 kJ$$

திருப்பு விசையின் திறன் (Power Delivered Torque)

திறன் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலையாகும். செய்யப்பட்ட வேலையை வேலை செய்யப்பட்ட சிறிய நேரத்தால் வகுக்க கிடைப்பது. உடனடித்திறன் (P) எனப்படும்.

திறன் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலையாகும். சேய்யப்பட்ட வேலையை வேலை செய்யப்பட்ட சிறிய நேரத்தால் வகுக்க கிடைப்பது. உடனடித்திறன் (P) எனப்படும்.

$$P = \frac{dw}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \because (dw = \tau d\theta)$$

$P = \tau\omega$

இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு இணையான இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தின் உடனடித் திறனிற்கான சமன்பாடு

$P = Fv$

இடப்பெயர்ச்சி மற்றும் சுழற்சி இயக்க அளவுகளுக்கான ஒப்பிட

சுழற்சி இயக்கத்திலுள்ள பெரும்பான்மையான சமன்பாடுகள் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தினைப் போன்றே இருப்பதால் சுழற்சி இயக்கத்தில் உள்ள அளவுகளை இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தில் உள்ள அளவுகளொடு அட்டவணை ஒப்பிடப்பட்டுள்ளது.

சூழல் மற்றும் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கங்களின் ஒப்பீடு

வ.எண்	இடப்பெயர்ச்சி இயக்கம்	சுழற்சி இயக்கம்
1.	இடப்பெயர்ச்சி, $\times$	கோண இடப்பெயர்ச்சி, θ
2.	நேரம், t	நேரம், t
3.	திசைவேகம், $v = \frac{dx}{dt}$	கோண திசைவேகம் $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
4.	முடுக்கம் $a = \frac{dv}{dt}$	கோண முடுக்கம் $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
5.	நிறை, m	நிலைமத்திருப்புத்திறன், I
6.	விசை $F = ma$	திருப்பு விசை, $\tau = I\alpha$
7.	உந்தம், $p = mv$	கோண உந்தம் $L = I\omega$
8.	கணத்தாக்கு, $F \Delta t = \Delta p$	கோணகணத்தாக்கு $\tau\Delta t = \Delta L$
9.	விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை $W = Fs$	திருப்புவிசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை, $W = \tau\theta$
10.	இயக்க ஆற்றல் $KE = \frac{1}{2} mv^2$	இயக்க ஆற்றல் $KE = \frac{1}{2} I\omega^2$
11.	திறன், $P\ Fv$	திறன் $P = \tau\omega$

உருளும் இயக்கம் (ROLLING MOTION)

உருளும் இயக்கத்தை பெரும்பாலான தினசரி வாழ்வியல் செயல்களில், காண இயலும். சக்கரத்தின இயக்கம் உருளும் இயக்கத்திற்கு சிறந்த எடுத்துக்காட்டு. வட்ட வடிவ பொருட்களான வளையம், வட்டத்தட்டு, கோளம் போன்றவற்றின் இயக்கம் உருளும் இயக்கத்திற்கு சிறந்த எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

கிடைத்தளப்பரப்பில் வட்டத்தட்டு ஒன்றின் உருளும் இயக்கத்தினைப்பற்றி நாம் இப்போது கற்காலாம். வட்டத்தட்டின் விளிம்பில் P என்ற புள்ளியை கருதுக. உருளும் போது அப்புள்ளியானது நிறை மையத்தினை பொறுத்து சுழற்சி இயக்கத்தினையும். மேலும், நிறைமையத்தோடு சேர்ந்து இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்திற்கும் உள்ளாகிறது.

இடப்பெயர்ச்சியும் சுழற்சியும் சேர்ந்த இயக்கம்

உருளும் இயக்கத்தில் இடப்பெயர்சி மற்றும் சுழற்சி இயக்கங்கள் எவ்வாறு தொடர்புடையது என்பதை இப்பகுதியில் பயிலலாம். சுழலும் தட்டின் ஆரம் R எனில் ஒரு முழு சுழற்சியின் போது அதன் நிறையைமானது அடையும் இடப்பெயர்ச்சி $2\pi R$ ஒரு முழு சுழற்சியின் போது நிறைமையம்

மட்டுமல்லாமல் வட்டத்தட்டில் உள்ள அனைத்து துகள்களும் அதே அளவான $2\pi R$, இடப்பெயர்ச்சியை அடைந்துள்ளது இந்நிகழ்வில் நிறைமையமானது நேர்கோட்டுப் பாதையில் இயங்குகின்றது. ஆனால் மற்ற புள்ளிகள் அனைத்தும் இடப்பெயர்ச்சி மற்றும் சுழற்சி ஆகிய இரண்டு இயக்கங்களையும் பெற்றுள்ளன. வட்டத்தட்டின் விளிம்பில் உள்ள புள்ளி மேற்கொள்ளும் பாதையை படம் 5.31 தெளிவாக விளக்குகிறது. இது மேற்கொள்ளும் சிறப்புப் பாதைக்கு சைக்ளாய்டு (cucloid) என்று பெயர்.

நிறை மையத்தின் திசைவேகம் V_{CM} என்பது இடப்பெயர்ச்சி திசைவேகம் V_{TRANS} $(V_{CM} = V_{TRANS})$ க்குச் சமம். மற்ற அனைத்து புள்ளிகளும் இரு திசைவேகங்களை பெற்றுள்ளன. முதலாவதாக இடப்பெயர்ச்சித் திசைவேகம் (V_{TRANS}) நிறைமையத்தின் [திசைவேகத்தை போன்றே] மற்றும் இரண்டாவதாக சுழற்சித் திசைவேகம் V_{ROT} (V_{ROT} =rω இங்கு r என்பது நிறை மையத்திலிருந்து புள்ளியின் தொலைவு மற்றும் ω கோணத்திசை வேகம்). ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் நாம் கருதிய புள்ளியின் திசைவேகம் V_{ROT} ஆனது நிலைவெக்டருக்கு செங்குத்தாக படம்5.32 (a) இல் அமையும் இவ்விரு திசைவேகங்களின் தொகுபயன் திசைவேகம் V எனப்படும். பொதுளானது உருளும் நிலையில் கிடைப்பரப்பை தொடும் புள்ளியிலிருந்து பெறப்படும் நிலை வெக்டருக்கு செங்குத்தாக தொகுபயன் திசைவேகம் V அமைந்திருப்பதை படம் (b) இல் காணலாம்.

உருளும் இயக்கத்தின் போது தொடுபுள்ளியின் முக்கியத்துவத்தை கருதுவோம். நழுவுதலற்ற உருளுதல் (pure rolling) போது, தரைப்பரப்பை தொடும் புள்ளி கணநேரத்திற்கு அமைதி நிலையில இருக்கும். பொருளின் விளிம்பில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளுக்கும் இதே நிகழ்வானது பொருந்தும். உருளுதலின் போது, விளிம்பில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளும் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக கிடைப்பரப்புடன் தொடர்பு கொள்ளும்போது கணநேரத்திற்கு அமைதி நிலையை அடைந்து, முன்பே கூறியது போல் சைக்ளாய்டு பாதையை மேற்கொள்கிறது.

எனவே நழுவுதலற்ற உருளுதல் இயக்கத்தை இரு வகைகளாக கருதலாம்.

(i) நிறை மையத்தைப் பொறுத்து இடப்பெயர்ச்சி மற்றும் சுழற்சி இயக்கங்கள்.

(அல்லது)
(ii) உரும் இயக்கத்தின் போது கிடைப்பரப்பை தொடும் புள்ளியின் கண நேர சுழற்சி இயக்கம்.

நழுவுதலற்ற உருளுதலின் போது கிடைப்பரப்பை தொடும் புள்ளியிலிருந்து அமைதி நிலையை அடைவதால் விளைவுத் திசைவேகம் V சுழியாகிறது (v = o). உதாரணமாக, படம் 5.33, லிருந்து V_{TRANS} முன்னோக்கியும் மற்றும் V_{ROT} பின்னோக்கியும் எண்ணளவில் சமமாகவும் ஒன்றுக் கொன்று எதிர் திசையிலும் இருப்பதை V_{TRANS} - V_{ROT} = o குறிக்கிறது. V_{TRANS} மற்றும் V_{ROT} ஆகியவை நழுவுதலற்ள உருளுதலின் போது பொருளின் விளிம்பில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளும் கிடைப்பரப்பைத் தொடும் போது V_{TRANS} மற்றும் V_{ROT} எண்ணளவில் சமமாகவும் உள்ளது $(V_{TRANS} = V_{ROT})$ எனக் கூற இயலும். எனவே V_{TRANS} = V_{CM} மற்றும் V_{ROT} = Rω, எனும் போது நழுவுதலற்ற உருளுதல் பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது.

$$V_{CM} = R\omega$$

சமன்பாடு 5.55 ஆனது சிறப்பு அம்சங்களைக் கொண்டுள்ளது என்பதை நாம் நினைவில் கொள்ள வேண்டும். சுழற்சி இயக்கத்தின போது, V = $r\omega$ என்ற தொடர்பின் படி, வட்டத்தட்டின் மையத்தில் r சுழியாவதால் மையப்புள்ளி திசைவேகத்தை பெற்றிருக்காது. ஆனால் உருள் இயக்கத்தின் போது சமன்பாடு 5.55 இன் படி வட்டத்தட்டின் மையமானது V_{CM} என்ற திசை வேகத்தை பெற்றிருப்பதை சுட்டிக்காட்டுகிறது.

நழுவுதலற்ற உருளுதலின் போது பெரும உயரய் புள்ளியானது V_{TRANS} மற்றும் V_{ROT} என்ற இரு திசைவேகங்களையும் ஒரே எண்மதிப்பையும், ஒரே திசையையும் (வலப்பக்கமாக) பெற்றிருக்கும்.

எனவே, தொகுபயன் திசைவேகம், $V = V_{TRANS} + V_{ROT}$ இன்னொரு வடிவில் படம் 5.34 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது போல் திசைவேகம், $V = 2\,V_{CM}$

நழுவுதலும் சறுக்குதலும் (Slipping and Sliding)

கோளவடிவப் பொருட்கள் இயங்கும் பொழுது எந்தவகை கிடைப்பரப்பிலும் உராய்வுக் குணகம் ($\mu >$ o) சுழியை விட அதிகமாக உள்ளபோது உருள ஆரம்பிக்கும். ஒரு பொருள் உருள தேவைப்படும் உராய்வு விசையை உருளுதலின் உராய்வு என்கிறோம். நழுவுதலற்ற உருளுதலின் போது கிடைப்பரப்பைத் தொடும் புள்ளியானது சார்புத்திசைவேகத்தைப் தொடும் புள்ளியானது சார்புத்திசைவேகத்தைப் பெற்றிருக்காது உருளுதலின்போது பொருளின் வேகத்தை அதிகரிக்கவோ அல்லது குறைக்கவே முறைப்பதாலோ ஏற்படுகிறது. இது திடீரென்று நடக்கும்போது, உருளும் பொருள் நழுவவோ அல்லது சறுக்கவோ செய்கிறது.

சறுக்குதல்

சறுக்குதல் என்பது $V_{CM} > R\omega$ $(V_{TRANS} > V_{ROT})$ எனும் நிபந்தனையின்போது நிகழ்கிறது. இடப்பெயர்ச்சி இயக்கம் அதிகம். இவ்வகையானது, ஒரு இயங்கும் வாகனம் திடீரென தடையை (brake) உணரும்போதோ அல்லது வாகனம் வழுவழுப்பான பரப்பில் இயங்க ஆரம்பிக்கும் போதோ ஏற்படுகிறது. இந்நிகழ்வின் போது கிடைப்பரப்பை தொடும் புள்ளியில் V_{TRANS} V_{ROT} விட V_{TRANS} அதிகமாக இருக்கும். இதன் தொகுபயன் திசைவேகமானது முன்னோக்கிய திசையில் படம் 5.35 இல் காட்டப்பட்டது போல் அமையும். இயக்க உராய்வு விசையானது (f_k) சார்பு இயக்கத்தை எதிர்க்கும். எனவே இவ்விசை சார்புத் திசைவேகத்திற்கு எதிர் திசையில் செயல்படும். உராய்வு விசையானது இடம்பெயர்வு திசை வேகத்தை குறைய செய்து பொருளானது நழுவுதலற்ற உருளுதலை ஏற்படுத்தும் வரை கோண திசைவேகத்தை அதிகரிக்க செய்யும். சறுக்குதல் என்பதை முன்னோக்கு நழுவுதல் என்றும் கூறலாம்.

நழுவுதல்

நழுவுதல் என்பது $V_{CM} < R\omega$ $(V_{TRANS} < V_{ROT})$ எனும் நிபந்தனையின்போது நிகழ்கிறது. நழுவுதலின்போது இடப்பெர்ச்சி இயக்கத்தை விட சுழற்சி இயக்கம் அதிகம். இவ்வகையானது இயங்கும் வாகனம் ஓய்வு நிலையிலிருந்து திடீரென் வேகமாக இயங்க ஆரம்பிக்கும்போது அல்லது சேற்றில் மாட்டிய வாகனம் இயங்கும் போதோ ஏற்படுகிறது. இந்நிகழ்வின் போது கிடைப்பரப்பை தொடும் புள்ளியில் V_{TRANS} வை விட V_{ROT} அதிகமாக இருக்கும். இதன் தொகுபயன் திசைவேகமானது பின்னோக்கிய திசையில் படம் 5.36 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது போல் இருக்கும். இயக்க உராய்வு விசையானது (f_k) சார்பு இயக்கத்தை எதிர்க்கும். எனவே இவ்விசை சார்புத் திசைவேகத்திற்கு எதிர் திசையில் திசை வேகத்தை குறையச் செய்து பொருளானது நழுவுதலற்ற உருளுதலை ஏற்படுத்தும் வரை இடம் பெயர்வுக்கு திசைவேகத்தை அதிகரிக்கும். இவ்வகை சறுக்குதலை பின்னோக்கி நழுவுதல் என்றும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

உருளும் சக்கரம் ஒன்றின் நிறைமையானது $5\,m\,s^{-1}$ திசைவேகத்துடன் இயங்குகிறது. இதன் ஆரம் 1.5 m மற்றும் கோண திசைவேகம் $3\text{rad}\,s^{-1}$ இச்சக்ரம் நழுவுதலற்ற உருளுதலில் உள்ளதா என சோதிக்க?

தீர்வு

இடம்பெயர்வு திசைவேகம் (V_{TRANS}) அல்லது நிறைமையத்தின் திசைவேகம்

$V_{CM} = 5\,m\,s^{-1}$

ஆரம், $R = 1.5\text{m}$ மற்றும் கோண திசைவேகம்

$\omega = 3 \text{rad}\, s^{-1}$

சுழற்சி திசைவேகம், $V_{ROT} = R\omega$

$$v_{ROT} = 1.5 \times 3$$
$$v_{ROT} = 4.5 \text{ m s}^{-1}$$

எனவே $V_{CM} > R\omega$. அல்லது $V_{TRANS} > R\omega$. இந்த இயக்கமானது நழுவுதலற்ற உருளுதல் இல்லை மாறாக சறுக்குதல் இயக்கத்தில் உள்ளது.

நழுவுதலற்ற உருளுதலின் இயக்க ஆற்றல்

நழுவுதலற்ற உருளுதல் இயக்கமானது இடம்பெயர்வு மற்றும் சுழற்சி இயக்கம் இணைந்த இயக்கமாகையால் மொத்த இயக்க ஆற்றலை இடம்பெயர்வு இயக்க ஆற்றல் (KE_{TRANS}) மற்றும் சுழற்சி இயக்க ஆற்றல் (KE_{ROT}) இவற்றின் கூடுதல் எனலாம்.

$$KE = KE_{TRANS} + KE_{ROT}$$

உருளும் பொருளின் நிறை M, நிறைமையத்தின் திசைவேகம் V_{CM}, அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன் நிறைமையத்தைப் பொருத்து I_{CM} மற்றும் கோண திசைவேகம் ω என்றால்,

$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2$$

நிறைமையத்தை ஆதாரமாகப் பொருத்து

நிறைமையத்தைப் பொருத்து உருளும் பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் (I_{CM}), மற்றும் V_{CM} = R. இங்கு, k என்பது சுழற்சி ஆரம்.

$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} + \frac{1}{2} (MK^2) \frac{v^2_{CM}}{R^2}$$
$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} + \frac{1}{2} Mv^2_{CM} \left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$
$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} \left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$$

கிடைப்பரப்பை தொடும் புள்ளியைப் பொருத்து

உருளுதலின் போது கிடைப்பரப்பைத் தொடும் புள்ளியைப் பொருத்து ஏற்படும் கணச் சுழற்சியை எடுத்துக்கொண்டு இயக்க ஆற்றலுக்கான சமன்பாட்டை நாம் பெற இயலும் (உருளுதலுக்கான மற்றொரு முறை) தொடும்புள்ளியை O என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$KE = \frac{1}{2} I_o\omega^2$$

இங்கு, $I_{.}$ தொடும் புள்ளியைப் பொறுத்து நிலைமத் திருப்புத்திறன். இணையச்சு தேற்றத்தின் படி, $I_{.} = I_{CM} + MR^2$ இதனை, $I_{.} = MK^2 + MR^2$ என நாம் கூறலாம். $v_{cm} = R\omega$ (அ) $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$

$$KE = = \frac{1}{2} (MK^2 + MR^2) \frac{v^2_{CM}}{R^2}$$

$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$$

சமன்பாடுகள் (5.59),(5.60) இரண்டும் சமம், ஆதலால் நழுவுதலற்ற உருளுதலுக்கான கணக்குகளுக்கன தீர்வுகளை கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் ஒரு நிகழ்வின் மூலம் தீர்மானிக்கலாம். மற்றும் சுழல் இயக்கம் இரண்டும் இணைந்து நிகழ்வு (அ)

(ii) தொடும்புள்ளியில் கணச் சுழற்சியைப் பொருத்த நிகழ்வு.

எடுத்துக்காட்டு

திண்மக் கோளம் ஒன்று நழுவுலற்ற உருளுதலில் உள்ள. அதன் இடப்பெயர்ச்சி இயக்க ஆற்றலுக்கும், சுழற்சி இயக்க ஆற்றலுக்கும் இடையேயான விகிதம் என்ன?

தீர்வு

நழுவுதலற்ற உருளுதலின் மொத்த ஆற்றலுக்கான சமன்பாடு,

$$KE = KE_{TRANS} + KE_{ROT}$$

மொத்த இயக்க ஆற்றலுக்கான சமன்பாடுகளிலிருந்து (5.58) மற்றும் (5.59),

$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} + \frac{1}{2} Mv^2_{CM}\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$KE = \frac{1}{2} Mv^2_{CM}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$$

என்பதால்,

$$\frac{1}{2} Mv^2_{CM}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} + = \frac{1}{2} Mv^2_{CM}\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து நழுவுதலற்ற உருளுதலின் மொத்த இயக்க ஆற்றலிற்கும் இடப்பெயர்ச்சி மற்றும் சுழற்சி இயக்க ஆற்றலிற்கும் இடையேயான தகவு

$$KE : KE_{TRANS} : KE_{ROT} :: \left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) : 1 : \left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

இப்பொழுது $KE_{TRANS} : KE_{ROT} :: 1 : \left(\frac{K^2}{R^2}\right)$

திண்ம கோளகத்திற்கு $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

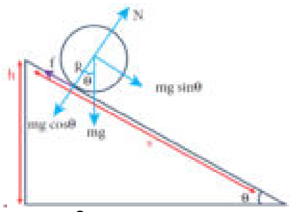
எனவே, $KE_{TRANS} : KE_{ROT} : : 1 : \frac{2}{5}$ or

$$KE_{TRANS} : KE_{ROT} : : 5 : 2$$

சாய்தளத்தில் உருளுதல்

சாய்தளத்தில் நிறை m, ஆரம் R கொண்ட உருளை வடிவப்பொருள் நழுவாமல் கீழ் நோக்கி உருள்வதை படம் (5.34) காட்டுவது போல் கருதுக. சாய்தளத்தில் பொருளின் மீது இரு விசையின் கூறு ($mg \sin \theta$), மற்றொன்று நிலை உராய்வு (f) ஆகும். புவியீர்ப்பு விசையின் மற்றொரு கூறு ($mg \cos\theta$) ஆனது தளத்திற்குச் செங்குத்தாக செயல்படும் செங்குத்து விசையினால் சமன்

செய்யப்படுகிறது. ஆகவே சாய்தளத்தின் மீது ஏற்படும், இவ்வியக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை தனித்த பொருளின் விசைப்படம் மூலம் பெறலாம்.



சாய்தளத்தில் உருளும் இயக்கம்

வானது இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தை ஏற்படுத்தும் விசையாவும், உராய்வு விசை இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தை எதிர்க்கும் விசையாகவும் இருக்கிறது.

$$mg \sin\theta - f = ma$$

சுழற்சி இயக்கத்தின் போது, பொருளின் மையத்தை பொருத்து திருப்பு விசையை கருதுக. mg $\sin\theta$ வின் கூறு திருப்பு விசையை ஏற்படுத்தாது, ஆனால் உராய்வு விசை f திருப்பு விசை Rf யை ஏற்படுத்தும்.

$$Rf = I\alpha$$

a = rα I = mK^2, என்ற தொடர்புகளின் படி,

$$Rf = mK^2 \frac{a}{R};\ f = ma\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

சமன்பாடானது,

$$mg \sin\theta - ma\left(\frac{K^2}{R^2}\right) = ma$$

$$mg \sin\theta = ma + ma\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$a = \left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = g \sin\theta$$

சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எழுதினால் முடுக்கமானது (a)

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

சாய்தளத்தில் உருளும் பொருளின் இறுதி திசைவேகத்தை இயக்கச் சமன்பாடுகளின் மூன்றாவது சமன்பாடான $v^2 = u^2 + 2as$ மூலமும் காணலாம். பொருளானது. அமைதி நிலையிலிருந்து உருள ஆரம்பிக்கும் போது ஆரம்ப திசை வேகம் சுழி, (u = 0). சாய்தளத்தின் குத்துயரம் h எனும் போது, சாய்தளத்தின் நீளம் s ஆனது, $s = \frac{h}{\sin\theta}$

$$v^2 = 2\ \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = \frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

இருபுறமும் வர்க்க மூலம் காண,

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}}$$

உருளும் பொருள் சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கிய இயங்க (அடிப்பகுதியை அடைய) எடுத்துக்கொள்ளும் காலத்தை இயக்கச் சமன்பாட்டில் முதலாவது சமன்பாடான, $v = u + at$ மூலம் பெறலாம். பொருளானது அமைதி நிலையிலிருந்து உருள ஆரம்பிக்கும் போது ($u = 0$),

$$t = \frac{v}{a}$$

$$t = \left(\sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}}\right)\left(\frac{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g\sin\theta}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g\, sin^2\theta}}$$

இச்சமன்பாட்டின் மூலம் நாம் அறிவது, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சாய்தளத்தில், மிகக்குறைந்த சுழற்சி ஆரம் கொண்ட உருளும் பொருள் முதலாவதாக வந்தடையும்.

எடுத்துக்காட்டு

நான்கு உருளை வடிவ பொருட்களான வளையம், வட்டத்தட்டு, உள்ளீடற்ற கோளம் மற்றும் திண்மக் கோளம் ஆகியவை ஒத்த ஆரம் சு உடன் ஒரே நேரத்தில் சாய்தளத்தில் உருள ஆரம்பிக்கிறது. எந்த பொருள் சாய்தளத்தின் அடிப்பகுதியை முதலில் வந்தடையும் என்பதைக் காண்க.

தீர்வு

வளையம், வட்டத்தட்டு, உள்ளீடற்றக் கோளம் மற்றம் திண்ம கோளம் ஆகிய நான்கின் சழற்சி

ஆரங்கள் K ஆனது R, $\sqrt{\frac{1}{2}}R$, $\sqrt{\frac{2}{3}}R$, $\sqrt{\frac{2}{5}}R$

(அட்டவணை (5.3) இன்படி இதன் எண்வடிவ முறையே 1R, 0.707 R, 0.816 R, 0.632 R ஆகும் நேரத்திற்கான சமன்பாடு

$$t = \sqrt{\frac{2h\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g\, sin^2\theta}}$$

சுழற்சி ஆரம் குறைவாகப் பெற்றுள்ள பொருள் அடிப்பகுதியை அடைய குறைந்த நேரத்தை எடுத்துக் கொள்ளும். சாய்தளத்தில் பொருட்கள், வந்தடையும் வரிசை: முதலில் திண்மக்கோளம், இரண்டாவது வட்டத்தட்டு, மூன்றாவது உள்ளீடற்ற கோளம், நான்காவது வளையம் என அமையும்.